Definiciones y propiedades útiles de funciones ortogonales:

Funciones trigonométricas:

(para funciones de período T)

- $sen(k_n x)$ y $cos(k_n x)$, con $k_n = \frac{2\pi n}{T}$ y n entero son base de las funciones en $(0, T)$
- Ortogonalidad: $\int\limits_0^T sen(k_n x) sen(k_{n'} x) dx = \frac{T}{2}\delta_{nn'}$, $\int\limits_0^T cos(k_n x) cos(k_{n'} x) dx = \frac{T}{2}\delta_{nn'}$, $\int\limits_0^T cos(K_n x) sen(k_{n'} x) dx = 0$

(para funciones cualquiera en $\mathbb{R}$)

- e^{ikx} es "base" de las funciones en $\mathbb{R}$
- Ortogonalidad: $\int e^{-ik'x} e^{ikx} dx = 2\pi\delta(k' - k)$

Polinomios de Legendre:

- $P_l(x) = \frac{1}{2!l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2 - 1\right)^l$ son base de las funciones en $(-1, 1)$ que no divergen en ± 1.
- Primeros polinomios: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right)$, $P_4(x) = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right)$
- Ortogonalidad: $\int\limits_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$
- Otras propiedades:
- $P_l(1) = 1$, $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$, $\frac{d}{dx}P_l(x)|_{x=1} = \frac{l(l+1)}{2}$ $\forall l$
- Algunas relaciones de recurrencia:
  $(l+1)P_{l+1}(x) = (2l+1)xP_l(x) - lP_{l-1}(x)$
  $\frac{x^2-1}{l}\frac{d}{dx}P_l(x) = xP_l(x) - P_{l-1}(x)$
  $(2l+1)P_l(x) = \frac{d}{dx}\left[P_{l+1}(x) - P_{l-1}(x)\right]$

Armónicos esféricos:

- $Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(cos\theta)e^{im\phi}$ son una base de las funciones bien comportadas en $[\theta \in (0,\pi), \phi \in (0,2\pi)]$ y periódicas en ϕ. Donde:
  $l = 0, ..., \infty$, $m = -l, ..., l$ enteros
  $P_l^m(x) = (-1)^m \left(1-x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, en particular: $P_l^0(x) = P_l(x)$
- Primeros armónicos:
  $Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
  $Y_1^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} sen(\theta)e^{\pm i\phi}$, $Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} cos(\theta)$
  $Y_2^{\pm 2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}} sen^2(\theta)e^{\pm i2\phi}$, $Y_2^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{4\pi}} sen(\theta)cos(\theta)e^{\pm i\phi}$,
  $Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3cos^2(\theta) - 1\right)$
- Ortogonalidad: $\int\int Y_l^{m*}(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) d\Omega = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$

Funciones de Bessel

1) Soluciones de la ecuación de Bessel $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2-\alpha^2)y = 0$

- Si α no es entero $J_\alpha(x)$ y $J_{-\alpha}(x)$ son soluciones linealmente independientes, donde:
  $J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$, con $\Gamma(x)$ es la generalización del factorial, de modo que $\Gamma(n+1) = n!$ para enteros.
- Si $\alpha = n$ entero, entonces $J_n(x)$ y $N_n(x)$ son soluciones independientes, donde:$N_n(x) = \lim_{\alpha\to n} \frac{J_\alpha(x)cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{sen(\alpha\pi)}$.
  en este caso $J_n(x)$ converge en 0 e $N_n(x)$ diverge en 0
- También suelen usarse como soluciones independientes las funciones de Hankel:
  $H_\alpha^{(1)}(x) = J_\alpha(x) + iN_\alpha(x)$
  $H_\alpha^{(2)}(x) = J_\alpha(x) - iN_\alpha(x)$

2) Soluciones de la ecuación de Bessel modificada $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2 + \alpha^2)y = 0$ $I_\alpha(x) = i^{-\alpha}J_\alpha(ix)$ y $K_\alpha(x) = \frac{\pi}{2}i^{\alpha+1}H_\alpha^{(1)}(ix)$ y por tanto $I_\alpha(x)$ converge en 0 y $K_\alpha(x)$ diverge en 0.

Desarrollos asintóticos: $x \ll 1 : J_\alpha(x) \to \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha$, $N_0(x) \to \frac{2}{\pi}\left[ln\left(\frac{x}{2}\right) + 0,5772...\right]$, $N_\alpha(x) \to \frac{-\Gamma(\alpha)}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^\alpha$ para $\alpha \neq 0$

$x \gg 1 : J_\alpha(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, $N_\alpha(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} cos\left(x - \frac{\alpha\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Relaciones de ortogonalidad: $\int\limits_0^a \rho J_\alpha\left(x_{\alpha n'}\frac{\rho}{a}\right) J_\alpha\left(x_{\alpha n}\frac{\rho}{a}\right) d\rho = \frac{a^2}{2}\left[J_{\alpha+1}\left(x_{\alpha n}\right)\right]^2 \delta_{nn'}$
donde $J_\alpha(x_{\alpha n}) = 0$. O sea, $x_{\alpha n}$ es la reíz n-esima de la función J_α