Teoría Electromagnética. Curso 2012.
Profesor: Ariel Moreno **Asistente:** Rodrigo Eyheralde

Práctico 7. Potenciales Retardados. Ondas en medios lineales, conductores y dispersivos.

1. Se considera un alambre recto infinito por el que circula una corriente $I(t) = kt$ para $t > 0$, con k constante positiva. Determinar los campos eléctrico y magnético.

2. Se considera una densidad de corriente constante $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, por lo que

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, 0) + \dot{\rho}(\mathbf{r}, 0)t$$

Pruebe que en este caso el campo eléctrico puede calcularse por la Ley de Coulomb, como en electrostática, con la densidad de carga evaluada a tiempo t (**no** el tiempo retardado t_R).

3. Se considera una corriente que varía lentamente, de modo que puede aproximarse bien por los primeros dos términos de su desarrollo de Taylor

$$\mathbf{J}(t_R) \approx \mathbf{J}(t) + \dot{\mathbf{J}}(t)(t_R - t)$$

donde la dependencia en $\mathbf{r}$ se ha dejado implícita. Pruebe que en ese caso el campo magnético puede calcularse por la Ley de Biot-Savart, como en magnetostática, con la densidad de corriente evaluada a tiempo t (**no** el tiempo retardado t_R).

4. Considere una onda monocromática plana propagándose en el vacío. En ese caso podemos escribir:

$$\tilde{\vec{E}}(\vec{r}, t) = [\tilde{E_1}\vec{\epsilon_1} + \tilde{E_2}\vec{\epsilon_2}]e^{\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t}$$

donde $\tilde{E_1}$ y $\tilde{E_2}$ son dos números complejos y $\vec{\epsilon_1}, \vec{\epsilon_2}$ son dos versores (reales) que cumplen $\vec{\epsilon_1} \cdot \vec{\epsilon_2} = \vec{\epsilon_1} \cdot \vec{k} = \vec{\epsilon_2} \cdot \vec{k} = 0$ y $\vec{\epsilon_1} \times \vec{\epsilon_2} = \frac{\vec{k}}{k}$.
(a) Probar que si $\tilde{E_1}$ y $\tilde{E_2}$ tienen la misma fase, entonces representan a una onda cuyos campos oscilan en una dirección espacial fija (polarización lineal).
(b) Probar que si $\tilde{E_2} = \pm i\tilde{E_1}$ entonces corresponde a una campo eléctrico cuya dirección gira con velocidad angular ω en sentido anti-horario y horario respectivamente (visto de frente a la onda y fijando la posición $\vec{r}$). Estas son las polarizaciones llamadas circular izquierda y derecha.
(c) Dos ondas monocromáticas planas tienen la misma frecuencia, número de onda y amplitud pero polarizaciones circulares opuestas. Demostrar que la superposición de las dos ondas es una onda linealmente polarizada con amplitud doble.

5. Considere dos ondas monocromáticas planas en el vacío con las mismas ω, $\mathbf{k}$ y dirección de polarización, pero distintas amplitudes y fases E_1, 0 y E_2 y ϕ respectivamente. Calcule el promedio temporal del vector de Poynting de la superposición de las dos ondas. Observe el efecto de interferencia debido a la diferencia de fases, que no ocurriría si las direcciones de polarización fueran perpendiculares.

6. Calcular el tensor de Maxwell para una onda monocromática plana que se mueve en la dirección z y esta polarizada en la dirección x.
¿Cómo se relaciona el flujo de momento con el flujo de energía en este caso?

7. (a)Una onda monocromática plana linealmente polarizada incide normalmente en una placa de espesor d de un medio dieléctrico con índice de refracción n y $\mu = \mu_0$ rodeada por el vacío. Calcular los coeficientes de trasmisión y reflección. Discutir en función de d.

(b) Discutir la situación considerada en (a) pero para un medio conductor de conductividad g.

8. Determine los coeficientes de transmisión y reflexión cuando una onda monocromática plana y lineamente polarizada incide en un medio dieléctrico lineal en los casos de:
(a) polarización paralela al plano de incidencia.
(b) polarización perpendicular al plano de incidencia.
(c) Estudiar en ambos casos la posible existencia de un ángulo de incidencia para el cual no hay onda reflejada. Este es el llamado ángulo de Brewster. ¿ Qué implica la diferencia entre ambos casos?

9. (a) Cierta cantidad de carga libre se coloca en un medio de vidrio con $g = 10^{-11}$ $(\Omega m)^{-1}$. Estimar el tiempo que tomará en fluir a la superficie.
(b) Si intentamos hacer un experimento en condiciones de aislamiento con microondas a una frecuencia de 10^{10} Hz, la plata es buen candidato para el recubrimiento ya que es un muy buen conductor, pero es muy caro. Calcular el espesor de plata mínimo conveniente para este experimento.
(c) Calcular la velocidad y la longitud de onda de ondas de radio de 1 MHz de frecuencia en cobre. Comparar con los valores correspondientes en el vacío.

10. (a) Pruebe que la profundidad de penetración ("skin depth") de los campos en un mal conductor ($g \ll \omega\epsilon$) es $(2/g)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para el agua.
(b) Mostrar que la profundidad de penetración en un buen conductor ($g \gg \omega\epsilon$) es $\lambda/2\pi$, donde λ es la longitud de onda en el conductor. Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para un metal típico ($g \approx 10^7$ $(\Omega m)^{-1}$) en el rango visible ($\omega \approx 10^{15} Hz$), asumiendo $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.
(c) Mostrar que en un buen conductor el campo magnético tiene un retraso de fase de $\pi/4$ respecto al campo eléctrico.

11. (a) Calcular el promedio temporal de la densidad de energía en una onda electromagnética plana en un medio conductor. Mostrar que la parte magnética siempre es la dominante. (Resultado: $(k^2/2\mu\omega^2)E_0^2 e^{-2kz}$).
(b) Mostrar que la intensidad es siempre $(k/2\mu\omega)E_0^2 e^{-2kz}$).

12. Para una onda plana incidente desde un medio de índice de refracción n_1 a uno de índice de refracción n_2, con $n_1 > n_2$, si el ángulo de incidencia es mayor que el *ángulo crítico*

$$\theta_C \equiv arcsen(n_2/n_1)$$

se da el fenómeno de *reflexión interna total.*
(a) Estudiar los campos en ese caso a ambos lados de la interfase para los casos de polarización perpendicular al plano de incidencia y paralela al plano de incidencia.
(b) Construir el vector de Poynting en cada caso y probar que en promedio no se trasmite energía hacia el medio 2.
Por ayuda ver Jackson Sección 7.4.

13. Considere un modelo de dispersión en el cual los electrones de la materia interactúan con las ondas electromagnéticas como osciladores amortiguados y forzados por el campo eléctrico incidente.
(a) En este modelo demuestre que el momento dipolar complejo $\tilde{p}(t) = \frac{q^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\tilde{E}(t)$.
Donde ω_0 es la frecuencia natural del oscilador, ω es la frecuencia de la onda electromagnética incidente, γ es la constante de amortiguamiento y $\tilde{E}(t)$ es el campo eléctrico complejo en la posición

del oscilador.
(b) A partir de (a) determinar la dependencia de la permitividad con la frecuencia.
(c) En base al resultado de (b). ¿ Cómo se comporta una onda al entrar en un medio de este tipo?
(d) Definiendo el coeficiente de absorción como el inverso de la distancia en la cual la intensidad cae en un factor de e grafique el coeficiente de absorción y el índice de refracción en función de la frecuencia cerca de una frecuencia de resonancia ω_0. ¿ Cómo depende esta gráfica del coeficiente de amortiguamiento γ?