Teoría Electromagnética. Curso 2010.
Práctico 5. Ondas Electromagnéticas.

1. (a) Se considera un medio en el que $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\mu = \mu_0$ pero en el que la polarización es una función dada de la posición y del tiempo $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Pruebe que las ecuaciones de Maxwell pueden satisfacerse a partir de una única función vectorial $\mathbf{Z}$, conocida como el *vector de Hertz*, que satisface

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

con los campos eléctrico y magnético dados por

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0} \quad , \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

(b) Se considera un medio en el que $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ pero en el que la magnetización es una función dada de la posición y del tiempo $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Pruebe que las ecuaciones de Maxwell pueden satisfacerse a partir de una única función vectorial $\mathbf{Y}$, que satisface

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

con los campos eléctrico y magnético dados por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Y} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$$

2. Dos ondas monocromáticas planas tienen la misma frecuencia, número de onda y amplitud pero polarizaciones circulares opuestas (es decir, izquierda y derecha). Demostrar que la superposición de las dos ondas es una onda linealmente polarizada con amplitud doble.

3. Considere dos ondas monocromáticas planas en el vacío con las mismas ω, $\mathbf{k}$ y dirección de polarización, pero distintas amplitudes y fases E_1, 0 y E_2 y ϕ respectivamente. Calcule el promedio temporal del vector de Poynting de la superposición de las dos ondas. Observe el efecto de interferencia debido a la diferencia de fases, que no ocurriria si las direcciones de polarización fueran perpendiculares.

4. La intensidad de luz solar que alcanza la Tierra es de 1300 W/m^2 aproximadamente. Calcular la presión ejercida sobre una superficie que absorba toda la radiación recibida, y sobre una superficie perfectamente reflectante. A que fracción de la presión atmosférica corresponde esto?.

5. Calcular el tensor de Maxwell para una onda monocromática plana que se mueve en la dirección z y esta polarizada en la dirección x.
Discuta. Como se relaciona el flujo de momento con el flujo de energía en este caso?

6. (a) Obtener las ecuaciones de Fresnel para las amplitudes de las ondas trasmitida y reflejada en el caso de polarización paralela al plano de incidencia.
(b) Grafique E_{0R}/E_{0I} y E_{0T}/E_{0R} como función del ángulo de incidencia para $n_2/n_1 = 1.5$. Considere el límite de incidencia normal.
(c) Proceda como en (b) para $n_1 = 1$ (aire), $n_2 = 2.42$ (diamante) y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

7. (a)Una onda monocromática plana linealmente polarizada incide normalmente en una placa de espesor d de un medio dieléctrico con índice de refracción n y $\mu = \mu_0$ rodeada por el vacío. Calcular los coeficientes de trasmisión y reflección. Discutir en función de d.
(b) Proceder como en (a) pero con tres medios de índices de refracción n_1, n_2 y n_3 y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$. La onda incide normalmente desde el medio 1 a la placa de medio 2 y pasa al medio 3.
(c)Aplique (b) a un acuario, la onda pasa del agua ($n_2 = \frac{4}{3}$) al vidrio ($n_1 = \frac{3}{2}$) y luego al aire ($n_3 = 1$).
(d) Discutir la situación considerada en (a) pero para un medio conductor de conductividad g.

8. (a) Cierta cantidad de carga libre se coloca en un medio de vidrio con $g = 10^{-11}$ $(\Omega m)^{-1}$. Estimar el tiempo que tomará en fluir a la superficie.
(b) La plata es un excelente conductor, pero muy caro. Calcular el espesor del recubrimiento de plata mínimo conveniente para un experimento con microondas a una frecuencia de 10^{10} Hz.
(c) Calcular la velocidad y la longitud de onda de ondas de radio de 1 MHz de frecuencia en cobre. Comparar con los valores correspondientes en el vacío.

9. (a) Pruebe que la profundidad de penetración ("skin depth") de los campos en un mal conductor ($g \ll \omega\epsilon$) es $(2/g)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para el agua.
(b) Mostrar que la profundidad de penetración en un buen conductor ($g \gg \omega\epsilon$) es $\lambda/2\pi$, donde λ es la longitud de onda en el conductor. Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para un metal típico ($g \approx 10^7$ $(\Omega m)^{-1}$) en el rango visible ($\omega \approx 10^{15} Hz$), asumiendo $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.
(c) Mostrar que en un buen conductor el campo magnético tiene un retraso de fase de $\pi/4$ respecto al campo eléctrico.

10. (a) Calcular el promedio temporal de la densidad de energía en una onda electromagnética plana en un medio conductor. Mostrar que la parte magnética

siempre es la dominante. (Resultado: $(k^2/2\mu\omega^2)E_0^2e^{-2kz}$).
(b) Mostrar que la intensidad es siempre $(k/2\mu\omega)E_0^2e^{-2kz}$).

11. Para una onda plana incidente desde un medio de índice de refracción n_1 a uno de índice de refracción n_2, con $n_1 > n_2$, si el ángulo de incidencia es mayor que el *ángulo crítico*

$$\theta_C \equiv arcsen(n_2/n_1)$$

se da el fenómeno de *reflexión interna total*.
(a) Estudiar los campos en ese caso a ambos lados de la interfase para los casos de polarización perpendicular al plano de incidencia y paralela al plano de incidencia.
(b) Construir el vector de Poynting en cada caso y probar que en promedio no se trasmite energía hacia el medio 2.
Por ayuda ver Jackson Sección 7.4.

12. * Para metales en la región infrarroja del espectro, sucede que $K_i = -K_r$ a una frecuancia de $\omega = g/(-\epsilon) = 10^14s^-1$. Calcule para este caso las constantes ópticas n y k en función de K_r

13. * Un vector de Poynting proporcional a E^2 decae según $e^{-\alpha z}$, donde $\alpha = 2/\delta$ se llama coeficiente de absorción. La pérdida de potencia se espresa frecuentemente en decibeles por metro (dB/m), y un decibel se define como diez veces el logaritmo de la razón del flujo de energía inicial al flujo de energía final por unidad de área. (a) Demuestre que la pérdida de potencia $= 4,34\alpha dB/m$. (b) Usando que $\delta = 2n/g\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ calcule la conductividad (óptica) que debe tener un medio para comunicaciones por ondas luminosas para lograr una pérdida tan baja como 1 dB/m, suponiendo que tiene un índice de refracción de $n = 1,5$

14. * Suponga:

$E(r, \theta, \phi, t) = A\frac{\sin(\theta)}{r}[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)]\hat{\phi}$, donde $\frac{\omega}{k} = c$

(a) Muestre que **E** obedece las 4 leyes de Maxwell y encuentre el campo **B** asociado.
(b) Calcule en vector de Poynting y su promedio temporal.
(c) Calcule la Potencia total radiada (como la integral de la intensidad en una superficie cerrada).