

Teoría Electromagnética. Curso 2008.
Práctico 5. Ondas Electromagnéticas.

1. (a) Se considera un medio en el que $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\mu = \mu_0$ pero en el que la polarización es una función dada de la posición y del tiempo $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$. Pruebe que las ecuaciones de Maxwell pueden satisfacerse a partir de una única función vectorial \mathbf{Z} , conocida como el *vector de Hertz*, que satisface

$$\nabla^2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}$$

con los campos eléctrico y magnético dados por

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Z} - \frac{\mathbf{P}}{\epsilon_0}, \quad \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \nabla \times \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial t}$$

(b) Se considera un medio en el que $\rho = 0$, $\mathbf{J} = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ pero en el que la magnetización es una función dada de la posición y del tiempo $\mathbf{M}(\mathbf{r}, t)$. Pruebe que las ecuaciones de Maxwell pueden satisfacerse a partir de una única función vectorial \mathbf{Y} , que satisface

$$\nabla^2 \mathbf{Y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Y}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{M}$$

con los campos eléctrico y magnético dados por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{Y}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial t}$$

2. Dos ondas monocromáticas planas tienen la misma frecuencia, número de onda y amplitud pero polarizaciones circulares opuestas (es decir, izquierda y derecha). Demuestre que la superposición de las dos ondas es una onda linealmente polarizada con amplitud doble.

3. Considere dos ondas monocromáticas planas en el vacío con las mismas ω , \mathbf{k} y dirección de polarización, pero distintas amplitudes E_1 , 0 y E_2 y ϕ . Calcule el promedio temporal del vector de Poynting de la superposición de las dos ondas. Observe el efecto de interferencia debido a la diferencia de fases, que no ocurriría si las direcciones de polarización fueran perpendiculares.

4. La intensidad de luz solar que alcanza la Tierra es de 1300 W/m^2 aproximadamente. Calcule la presión ejercida sobre una superficie que absorba toda la radiación recibida, y sobre una superficie perfectamente reflectante. A qué fracción de la presión atmosférica corresponde esto? Estime el impulso transferido a la tierra.

5. Calcule el tensor de Maxwell para una onda monocromática plana que se mueve en la dirección z y esta polarizada en la dirección x . Discuta. Como se relaciona el flujo de momento con el flujo de energía en este caso?

6. (a) Demuestre que los campos de las ondas transmitidas y reflejadas son paralelos al campo de la onda incidente.

(b) Grafique E_{0R}/E_{0I} y E_{0T}/E_{0R} como función del ángulo de incidencia para $n_2/n_1 = 1.5$. Considere el límite de incidencia normal.

(c) Repita (b) para $n_1 = 1$ (aire), $n_2 = 2.42$ (diamante) y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

7. (a) Una onda monocromática plana linealmente polarizada incide normalmente en una placa de espesor d de un medio dieléctrico con índice de refracción n y $\mu = \mu_0$ rodeada por el vacío. Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión. Discuta en función de d .

(b) Proceda como en (a) pero con tres medios de índices de refracción n_1 , n_2 y n_3 y $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_0$. La onda incide normalmente desde el medio 1 a la placa de medio 2 y pasa al medio 3.

(c) Aplique (b) a un acuario, la onda pasa del agua ($n_2 = \frac{4}{3}$) al vidrio ($n_1 = \frac{3}{2}$) y luego al aire ($n_3 = 1$).

(d) Discuta la situación considerada en (a) pero para un medio conductor de conductividad g .

8. (a) Cierta cantidad de carga libre se coloca en un medio de vidrio con $g = 10^{-11} (\Omega m)^{-1}$. Estime el tiempo que tomará en fluir a la superficie.

(b) La plata es un excelente conductor, pero muy caro. Calcule el espesor del recubrimiento de plata mínimo conveniente para un experimento con microondas a una frecuencia de $10^{10} Hz$.

(c) Calcule la velocidad y la longitud de onda de ondas de radio de $1 MHz$ de frecuencia en cobre. Compare con los valores correspondientes en el vacío.

9. (a) Pruebe que la profundidad de penetración ("skin depth") de los campos en un mal conductor ($g \ll \omega\epsilon$) es $(2/g)\sqrt{\epsilon/\mu}$ (independiente de la frecuencia). Encuentre la profundidad de penetración (en metros) para el agua.

(b) Muestre que la profundidad de penetración en un buen conductor ($g \gg \omega\epsilon$) es $\lambda/2\pi$, donde λ es la longitud de onda en el conductor. Encuentre la profundidad de penetración (en metros) para un metal típico ($g \approx 10^7 (\Omega m)^{-1}$) en el rango visible ($\omega \approx 10^{15} Hz$), asumiendo $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.

(c) Muestre que en un buen conductor el campo magnético tiene un retraso de fase de $\pi/4$ respecto al campo eléctrico.

10. (a) Calcule el promedio temporal de la densidad de energía en una onda electromagnética plana en un medio conductor. Muestre que la parte magnética siempre es la dominante. (Resultado: $(k^2/2\mu\omega^2)E_0^2 e^{-2kz}$).

(b) Muestre que la intensidad es siempre $(k/2\mu\omega)E_0^2 e^{-2kz}$.

11. Para una onda plana incidente desde un medio de índice de refracción n_1 a uno de índice de refracción n_2 , con $n_1 > n_2$, si el ángulo de incidencia es mayor que el *ángulo crítico*

$$\theta_C \equiv \arcsen(n_2/n_1)$$

se da el fenómeno de *reflexión interna total*.

- (a) Estudie los campos en ese caso a ambos lados de la interfase para los casos de polarización perpendicular al plano de incidencia y paralela al plano de incidencia.
- (b) Construya el vector de Poynting en cada caso y pruebe que en promedio no se trasmite energía hacia el medio 2.