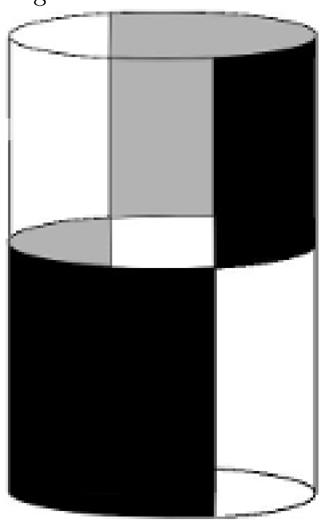
1. Un cilindro largo, de radio **a** está sometido a un potencial periódico a lo largo de su eje (ver figura), que vale V_0en las zonas marcadas en negro y $-V_0$ en las zonas marcadas en blanco. Encontrar una expresión para el potencial dentro del cilindro, sabiendo que la altura de las manchas es h.

Fig. 1: Perfil de Potencial



2. Una burbuja de jabón tiene una carga Q distribuida en su superficie. Si la presión interior y exterior son iguales, encuentra el radio para el cual la tensión superficial y la presión electrostática se equiparan. (Nota: la tensión superficial genera una presión hacia adentro de valor $2T/r$). ¿Es esta radio estable frente a perturbaciones?

SOLUCIONES:

.

EJERCICIO 1:

Por separación de variables (en cilíndricas) el potencial tiene la forma $\Phi(r,\phi,z) = R(r)Q(\phi)Z(z)$ con:

$R(r) = A_{k\nu}J_\nu(kr)+B_{k\nu}N_\nu(kr)$, $Q(\phi) = C_\nu e^{i\nu\phi}+D_\nu e^{-i\nu\phi}$ y $Z(z) = E_k e^{k\phi}+ F_k e^{-k\phi}$ o tambien

$R(r) = A_{k\nu}I_\nu(kr)+B_{k\nu}K_\nu(kr)$, $Q(\phi) = C_\nu e^{i\nu\phi}+D_\nu e^{-i\nu\phi}$ y $Z(z) = E_k e^{ik\phi}+ F_k e^{-ik\phi}$

Esta segunda opción es la que nos sirve dada la periodicidad en z.

Ya que el cilindro está completo $\nu = m$. También por la periodicidad en z y ϕ (poniendo el origen del sistema de coordenadas en el cambio de signo del potencial: $Q(\phi) = C_m sen(m\phi)$ y $Z(z) = E_n sen(\frac{2\pi}{2h}nz)$.

En cuanto al término radial, sólo conservamos las funciones $I_\nu(kr)$ pues las otras divergen en $r = 0$. Con todo esto la forma del potencial es

$\Phi(r,\phi,z) = \sum_{m,n} A_{mn} I_m(\pi n\frac{r}{h}) sen(m\phi) sen(\pi n\frac{z}{h})$

Para obtener los coeficientes usamos las condiciones de borde (sabiendo que es periódica en ϕ y z:

$\Phi(a,\phi,z) = V_0 \left\{ \begin{array}{c} 1, \phi < \pi \\ -1, \phi > \pi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1, z > 0 \\ -1, z < 0 \end{array} \right\}$

Entonces:

$\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \Phi(a,\phi,z) sen(m'\phi) sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h} dz d\phi =$

$= \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \sum_{m,n} A_{mn} I_m(\pi n \frac{a}{h}) sen(m\phi) sen(\pi n \frac{z}{h}) sen(m'\phi) sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h} dz d\phi \Longrightarrow$

$V_0 \left[\int_0^{\pi} sen(m'\phi)d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} sen(m'\phi)d\phi\right]\left[-\int_{-\pi}^{0} sen(n't)dt + \int_0^{\pi} sen(n't)dt\right] =$

$= \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \sum_{m,n} A_{mn} I_m(\pi n \frac{a}{h}) sen(\pi n \frac{z}{h}) sen(m\phi) sen(m'\phi) sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h} dz d\phi \Longrightarrow$

$V_0 \left[\frac{-cos(m'\pi)+cos(0)+cos(2\pi)-cos(m'\pi)}{m'}\right]\left[\frac{cos(0)-cos(-n'\pi)-cos(n'\pi)+cos(2\pi)}{n'}\right] = A_{m'n'} I_{m'}(\pi n' \frac{a}{h})\pi^2 \Longrightarrow$

$A_{m'n'} = V_0 \frac{2-2(-1)^{m'}}{m'}\frac{2-2(-1)^{n'}}{n'}\frac{1}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2} = \frac{1-(-1)^{m'}}{m'}\frac{1-(-1)^{n'}}{n'}\frac{4V_0}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2}$

Sólo sobreviven los m' y n' impares y en esos casos:

$\boxed{A_{m'n'} = V_0 \frac{2-2(-1)^{m'}}{m'}\frac{2-2(-1)^{n'}}{n'}\frac{1}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2} = \frac{1}{m'n'}\frac{16V_0}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2}}$

.

EJERCICIO 2:

La fuerza $\vec{F} = -\oint \overleftrightarrow{T}.\vec{n}ds$. En el caso de la superficie de la esfera $\overrightarrow{n} = \hat{e_r}$y usando:

$T_{ij} = -\left[\varepsilon_0\left(E^iE^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}E^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(B^iB^j - \frac{1}{2}\delta^{ij}B^2\right)\right]$,con $\vec{B}=0$ entonces

$\left(\overleftrightarrow{T}.\vec{n}\right)_j = T^{ij}\left(\hat{e_r}\right)_j = -\varepsilon_0\left(E^i\vec{E}.\hat{e_r} - \frac{1}{2}\left(\hat{e_r}\right)^i E^2\right) \Longrightarrow -\overleftrightarrow{T}.\vec{n} = \varepsilon_0\left(\vec{E}\vec{E}.\hat{e_r} - \frac{1}{2}\hat{e_r}E^2\right) = \varepsilon_0\frac{1}{2}\hat{e_r}E^2 = \varepsilon_0\frac{1}{2}\hat{e_r}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$

y por tanto la presión es $P_{electrica} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 r^4}$.

Busco que $P_{electrica} = P_{tension} \Longrightarrow \frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0\bar{r}^4} = \frac{2T}{\bar{r}} \Longrightarrow \bar{r} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 2T}}$

Para estudiar la estabilidad calculo: $\frac{dP}{dr}_{r=\bar{r}} = \frac{1}{2}\frac{(-4)Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0\bar{r}^5} - \frac{(-1)2T}{\bar{r}^2} \Longrightarrow$ $\frac{dP}{dr}_{r=\bar{r}} = \bar{r}\left[\frac{1}{2}\frac{(-4)Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0\bar{r}^6} - \frac{(-1)2T}{\bar{r}^3}\right] \Longrightarrow$

$\frac{dP}{dr}\frac{1}{\bar{r}} = \frac{1}{2}\frac{(-4)Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 2T}\right)^2} - \frac{(-1)2T}{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{(4\pi)^2\varepsilon_0 2T}} = \frac{-8(4\pi)^2\varepsilon_0(2T)^2}{Q^2} + \frac{2(4\pi)^2\varepsilon_0(2T)^2}{Q^2} < 0$

no es estable.