# Solucíón del ejercicio 1:

Por separación de variables (en cilíndricas) el potencial tiene la forma $\Phi(r,\phi,z) = R(r)Q(\phi)Z(z)$ con:

$R(r) = A_{k\nu}J_\nu(kr)+B_{k\nu}N_\nu(kr)$, $Q(\phi) = C_\nu e^{i\nu\phi}+D_\nu e^{-i\nu\phi}$ y $Z(z) = E_k e^{k\phi}+F_k e^{-k\phi}$ o tambien

$R(r) = A_{k\nu}I_\nu(kr)+B_{k\nu}K_\nu(kr)$, $Q(\phi) = C_\nu e^{i\nu\phi}+D_\nu e^{-i\nu\phi}$ y $Z(z) = E_k e^{ik\phi}+F_k e^{-ik\phi}$

Esta segunda opción es la que nos sirve dada la periodicidad en z.

Ya que el cilindro está completo $\nu = m$ . También por la periodicidad en $z$ y $\phi$ (poniendo el origen del sistema de coordenadas en el cambio de signo del potencial: $Q(\phi) = C_m sen(m\phi)$ y $Z(z) = E_n sen(\frac{2\pi}{2h}nz)$.

En cuanto al término radial, sólo conservamos las funciones $I_\nu(kr)$ pues las otras divergen en $r = 0$. Con todo esto la forma del potencial es

$\Phi(r,\phi,z) = \sum_{m,n} A_{mn}I_m(\pi n\frac{r}{h})sen(m\phi)sen(\pi n\frac{z}{h})$

Para obtener los coeficientes usamos las condiciones de borde (sabiendo que es periódica en $\phi$ y $z$:

$\Phi(a,\phi,z) = V_0 \left\{ \begin{array}{c} 1, \phi < \pi \\ -1, \phi > \pi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} 1, z > 0 \\ -1, z < 0 \end{array} \right\}$

Entonces:

$\int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \Phi(a,\phi,z)sen(m'\phi)sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h}dzd\phi =$

$= \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \sum_{m,n} A_{mn}I_m(\pi n\frac{a}{h})sen(m\phi)sen(\pi n\frac{z}{h})sen(m'\phi)sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h}dzd\phi \Longrightarrow$

$V_0\left[\int_0^{\pi} sen(m'\phi)d\phi - \int_{\pi}^{2\pi} sen(m'\phi)d\phi\right]\left[-\int_{-\pi}^{0} sen(n't)dt + \int_0^{\pi} sen(n't)dt\right] =$

$= \int_0^{2\pi}\int_{-h}^{h} \sum_{m,n} A_{mn}I_m(\pi n\frac{a}{h})sen(\pi n\frac{z}{h})sen(m\phi)sen(m'\phi)sen(\frac{\pi}{h}n'z)\frac{\pi}{h}dzd\phi \Longrightarrow$

$V_0\left[\frac{-cos(m'\pi)+cos(0)+cos(2\pi)-cos(m'\pi)}{m'}\right]\left[\frac{cos(0)-cos(-n'\pi)-cos(n'\pi)+cos(2\pi)}{n'}\right] = A_{m'n'}I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2 \Longrightarrow$

$A_{m'n'} = V_0\frac{2-2(-1)^{m'}}{m'}\frac{2-2(-1)^{n'}}{n'}\frac{1}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2} = \frac{1-(-1)^{m'}}{m'}\frac{1-(-1)^{n'}}{n'}\frac{4V_0}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2}$

Sólo sobreviven los m' y n' impares y en esos casos:

$$\boxed{A_{m'n'} = V_0\frac{2-2(-1)^{m'}}{m'}\frac{2-2(-1)^{n'}}{n'}\frac{1}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2} = \frac{1}{m'n'}\frac{16V_0}{I_{m'}(\pi n'\frac{a}{h})\pi^2}}$$