

**Teoría Electromagnética  
Curso 2019**

**Primer parcial**

**Problema 1.**

Considere un anillo de radio  $R$  y carga  $Q$  distribuida uniformemente, que se encuentra en el plano  $x - y$ .

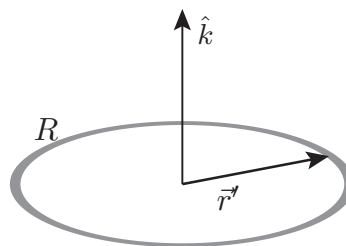


Figura 1

**a.** Mostrar que la densidad volumétrica de carga del anillo se puede escribir como

$$\rho(\vec{r}') = \lambda \frac{1}{r'} \delta(r' - R) \delta(\cos(\theta')) \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{Q}{2\pi R}.$$

Nota: Puede ser útil la propiedad de la función delta de Dirac  $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|f'(x_0)|}$  con  $x_0$  raíz de  $f(x)$ .

La expansión multipolar del potencial de una distribución de cargas  $\rho(\vec{r}')$  para  $r > R$  es

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell m} \frac{Y_{\ell m}(\theta, \varphi)}{r^{\ell+1}} \quad \text{con} \quad A_{\ell m} = \frac{4\pi}{2\ell+1} \int d^3r' \rho(\vec{r}') r'^{\ell} Y_{\ell m}^*(\theta', \varphi').$$

**b.** Dada la simetría de la distribución de cargas ¿cuáles son los valores posibles de  $m$  si escribimos el desarrollo multipolar del potencial que genera? ¿Por qué? Escriba la expresión de los armónicos esféricos para este caso (ver Manual de fórmulas del curso).

**c.** Usando el resultado de la parte b- escriba el potencial eléctrico  $\phi(\vec{r})$  generado por el anillo en puntos con  $|\vec{r}| = r > R$ .

**d.** Calcule explícitamente los dos primeros términos del desarrollo de  $\phi(r, \theta)$  obtenido en c-.

**Problema 2.** La función de Green con condición de borde de Dirichlet para cualquier volumen finito  $V$  siempre se puede escribir como

$$G_D(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Lambda(\vec{r}, \vec{r}'), \quad \text{con} \quad \nabla^2\Lambda(\vec{r}, \vec{r}') = 0 \quad \text{si } \vec{r}, \vec{r}' \in V.$$

Queremos probar que  $G_D(\vec{r}, \vec{r}') < \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}$  en  $V$ .

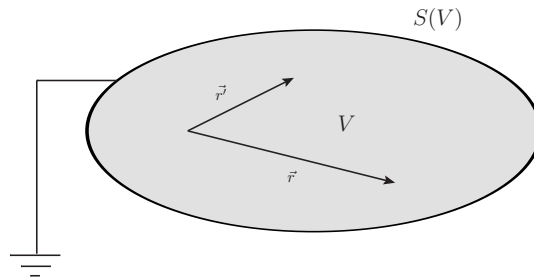


Figura 2

**a.** ¿Cuál es el significado físico de la función  $G_D(\vec{r}, \vec{r}')$ ? ¿Está relacionada con el potencial producido por alguna distribución de cargas en especial?

**b.** Dada su respuesta anterior ¿cuál debe ser el signo de la carga inducida por esta distribución de cargas en la frontera del volumen  $S(V)$ ?

**c.** ¿Cuál es el significado físico de la función  $\Lambda(\vec{r}, \vec{r}')$ ? ¿Qué signo tiene?

**d.** Pruebe que  $G_D(\vec{r}, \vec{r}') < \frac{1}{4\pi\epsilon_0|\vec{r} - \vec{r}'|}$  en  $V$ .