Teoría Electromagnética
Curso 2021

Práctico 1
Potenciales y Herramientas Matemáticas

1. a) Suponiendo que los campos $\vec{A}$ y ϕ caen suficientemente rápido a cero en el infinito, demuestre que:

i) La condición de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ fija por completo la libertad gauge del electromagnetismo (es decir los campos $\vec{A}$ y ϕ).

ii) Este gauge minimiza $\int_{\mathbb{R}^3} |\vec{A}|^2 dV$

b) Demuestre que el gauge de Lorenz, definido por $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$ no fija por completo la libertad gauge (en ese caso decimos que es incompleto). ¿Qué otra condición deberá agregarse para eliminar esta libertad?

c) Muestre que el gauge temporal, definido por $\phi = 0$, es incompleto.

2. a) Halle los campos y las distribuciones de carga y corriente correspondientes a:

$$\phi(\vec{r}, t) \;=\; 0 \qquad\qquad \vec{A}(\vec{r}, t) \;=\; -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r^2}\hat{e}_r$$

b) Use la función $\Lambda = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qt}{r}$ para transformar los potenciales de a) y comente el resultado.

3.* Aplicando los resultados generales de los operadores vectoriales en un sistema ortogonal de coordenadas (u_1, u_2, u_3) con coeficientes métricos (h_1, h_2, h_3), obtenga en coordenadas cilíndricas y esféricas las expresiones para:

a) Gradiente de un campo escalar $\phi(\vec{r})$.
b) Laplaciano de un campo escalar $\phi(\vec{r})$.
c) Divergencia de un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$.
d) Rotor de un campo vectorial $\vec{A}(\vec{r})$.

4.* Ante una rotación activa o pasiva dada por R_{ab}, los campos *escalares* $\Phi(\mathbf{x})$ y *vectoriales* $V_a(\mathbf{x})$ transforman según las leyes:

$$\Phi'(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x})$$
$$V_a'(\mathbf{x}') = \sum_b R_{ab} V_b(\mathbf{x})$$

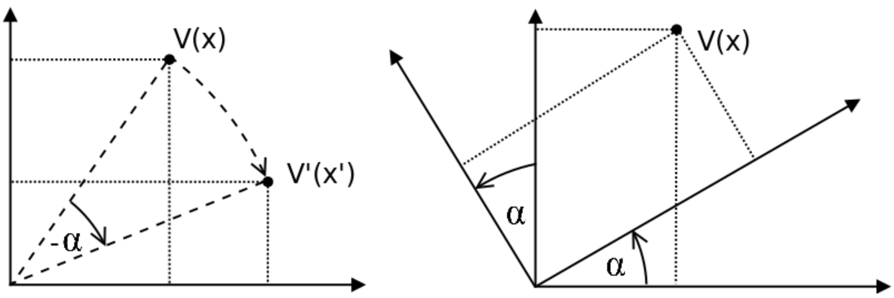

Figura 1: Rotaciones activa y pasiva correspondientes.

a) Considere el operador:

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{\mathbf{e}}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

Estudie cómo transforma ante una rotación.
b) Obtenga las leyes de transformación de las expresiones:

$$\nabla\Phi, \quad \nabla\cdot\vec{V}, \quad \nabla\times\vec{V}, \quad \nabla^2\Phi$$

siendo $\Phi(\mathbf{x})$ un campo escalar y $\vec{V}(\mathbf{x})$ un campo vectorial.

5. La función salto unidad en el origen o función de Heaviside $H(x)$ se define como:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

a) Calcule las derivadas como distribuciones de:
1) $[1 - H(x)]\cos(x)$
2) $[H(x+2) + H(x) - H(x-2)]\, e^{-2x}$
3) $\tanh(1/x)$

b) Muestre que:
1) $sen(ax)\delta'(x) = -a\delta(x)$
2) $\frac{d^2}{dx^2}e^{ik|x|} = 2ik\delta(x) - k^2 e^{ik|x|}$

*c) La función de Bessel $J_0(x)$ es solución de la ecuación de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

con $\alpha = 0$.

1) Muestre que $H(x)J_0(x)$ es solución de la ecuación (como distribución).

2) Muestre que $H(x)J_0(x)$ también es solución (como distribución) de la ecuación simplificada

$$xy'' + y' + xy = 0$$

.

6. a) Muestre que:
1) $\delta(\cos(x)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(x - (2n+1)\pi/2\right)$
2) $\delta(\tan(x)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(x - n\pi)$
3) $\delta(x^3 + 3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$
b) Calcule $\int_0^1 e^{2x}\delta(2x-1)dx$.

7. a) La densidad de carga T_p asociada a un dipolo puntual $\vec{p}$ en $\vec{r} = \vec{r}_0$ se define como:

$$T_p = -\vec{p}.\nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad .$$

Compruebe que al integrar esta distribución contra $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ se obtiene el potencial de un dipolo puntual.

b) Partiendo de la fórmula de cambio de variables, halle las expresiones de $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ en coordenadas esféricas y cilíndricas.

c) Utilizando que $\int \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)d^3\vec{r} = 1$, halle las expresiones adecuadas de $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ en coordenadas cilíndricas y esféricas cuando en el problema existe simetría en alguna variable.

d) Exprese las siguientes distribuciones de carga como densidades volumétricas:

i) Una carga puntual.

ii) Una línea de carga infinita de densidad uniforme λ.

iii) Un anillo cargado de densidad uniforme λ.

iv) Un disco cargado con densidad superficial uniforme σ.

v) Una esfera de densidad superficial uniforme σ.

En todos los casos hágalo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.