

6)

Relatividad y formulación covariante de la electrodinámica.

I) El conflicto de las leyes de Maxwell con la relatividad de Galileo

Relatividad de Galileo (MOVIMIENTO RELATIVO.)

1- la física es la misma para todos los sistemas inerciales.

Donde los objetos sobre los que no actúan fuerzas se mueven con velocidad constante.

2- Dado un sistema inercial

$A = (x, y, z)$, todo sistema inercial

$A' = (x', y', z')$ se relaciona con A

mediante una transformación independiente del tiempo ?

(rotación, traslación) o una transformación de

la forma

$$x' = x - v_x t$$

$$y' = y - v_y t$$

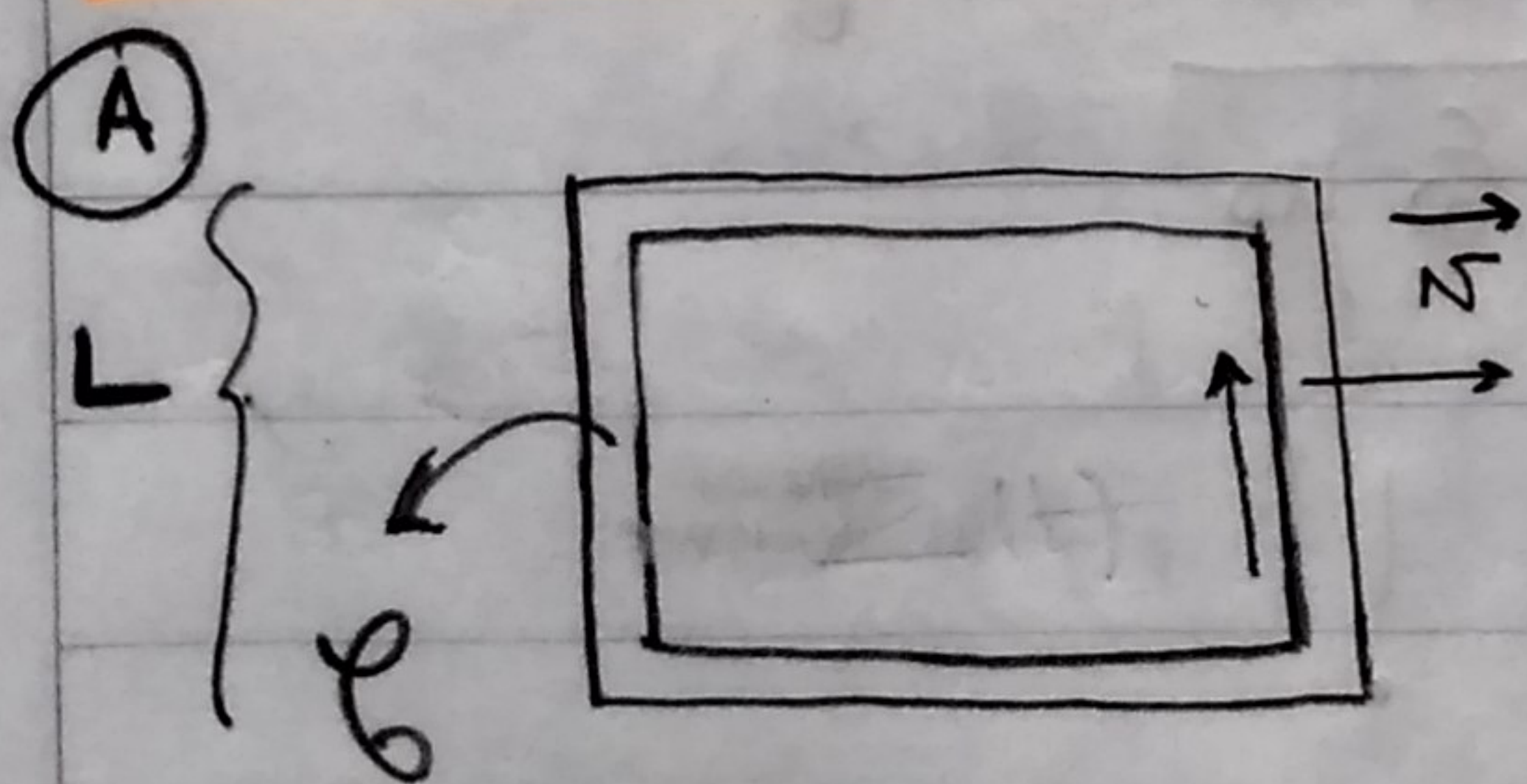
$$z' = z - v_z t$$

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ es la

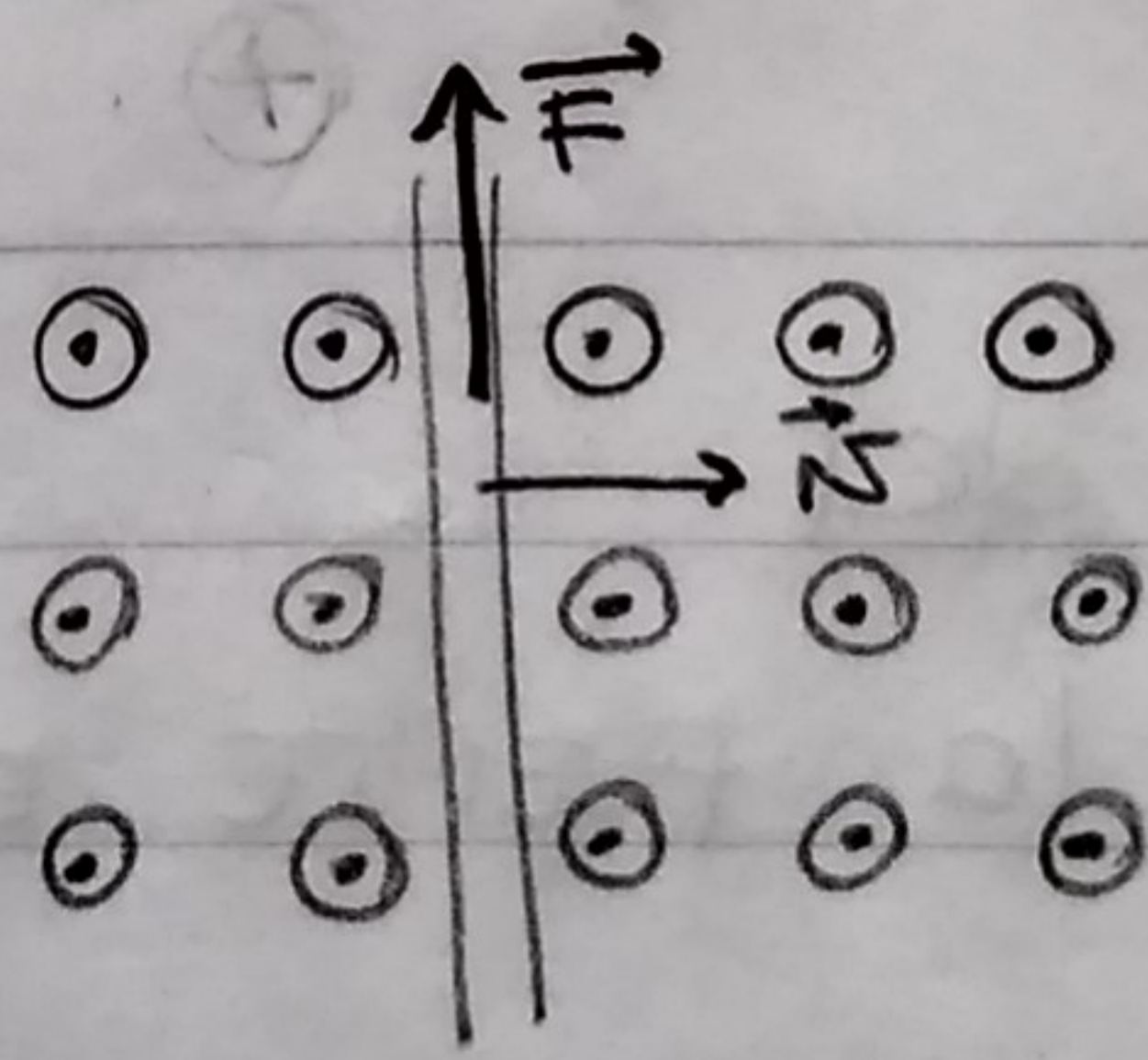
velocidad de traslación

de A' respecto a A .

CONFLICTO I: la fuerza electromotriz



ESPIRA



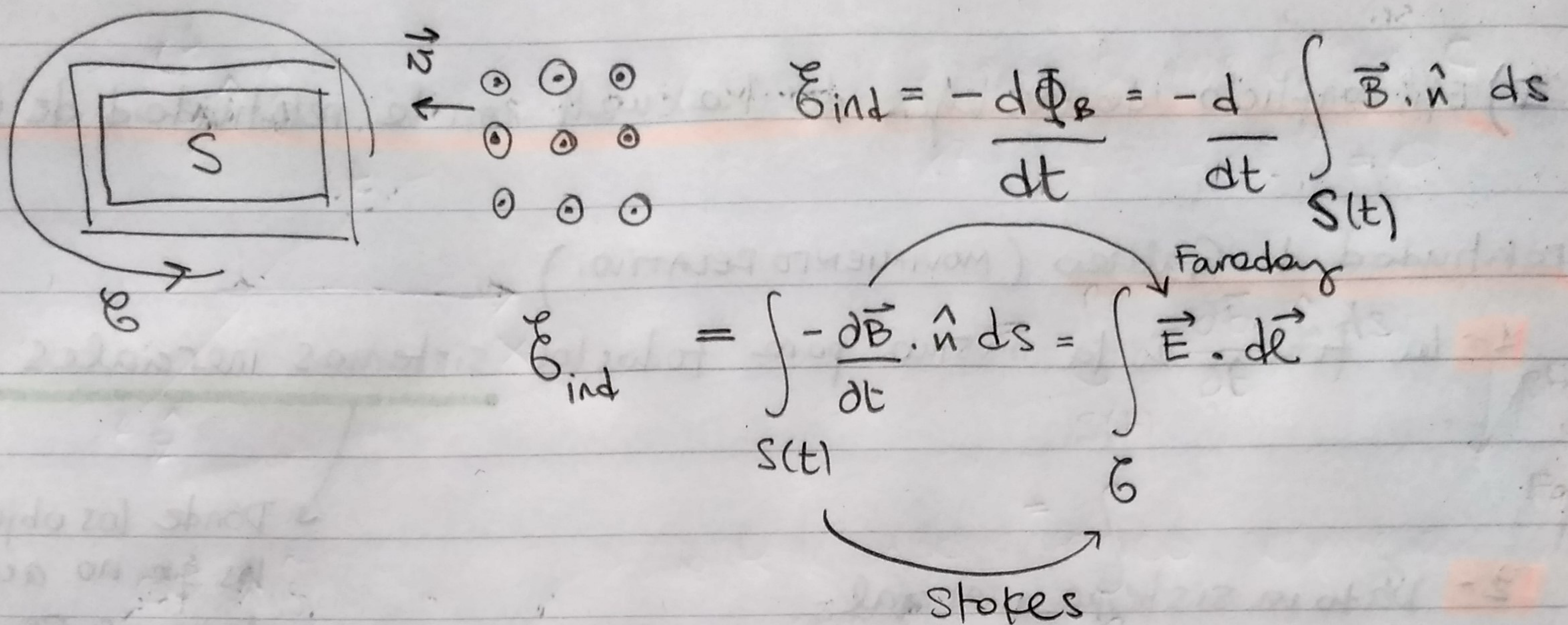
ZONA CON \vec{B} UNIFORME

$$\Phi_B = (vt) \cdot L \cdot B$$

si la espira se acerca al imán (quieto) con velocidad \vec{v} , aparece en ella una F.E.M. porque las cargas sienten una fuerza magnética, $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ entonces:

$$\mathcal{E} = \oint_C \left(\frac{\vec{F}}{q} \right) \cdot d\vec{\ell} = \oint_C \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B})}_{vBL} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

(B) la espira está quieta y el imán se acerca con velocidad \vec{v}



En la espira aparece una fem inducida que se debe a la variación del flujo de campo magnético a través de ella.

Estas 2 fem producen el mismo valor de la corriente en el cable, y a Einstein (y a nosotros) esto no nos parece una coincidencia inocente...

CONFLICTO 2:

los ondas EM en el vacío viajan con $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ y las

vel. de onda NO dependen del estado de movimiento de la FUENTE EMISORA!

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0 \quad \hookrightarrow \quad \vec{E}, \vec{B}, \vec{A}, \phi$$

Respuesta hasta el 30/6/1905:

- las leyes de Maxwell no cumplen el principio de relatividad de Galileo: valen en el marco de referencia del ÉTER (la sustancia en la que los ondas EM se mueven a velocidad c).
- los experimentos NO ENCONTRABAN movimiento de la Tierra en el ÉTER.

¿Qué propuso Einstein?

POSTULADOS

- 1- Principio de Relatividad: TODAS las leyes de la FÍSICA son válidas en todos los sistemas de referencia inerciales.
- 2- la velocidad de propagación de las ondas EM. en el vacío es siempre $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

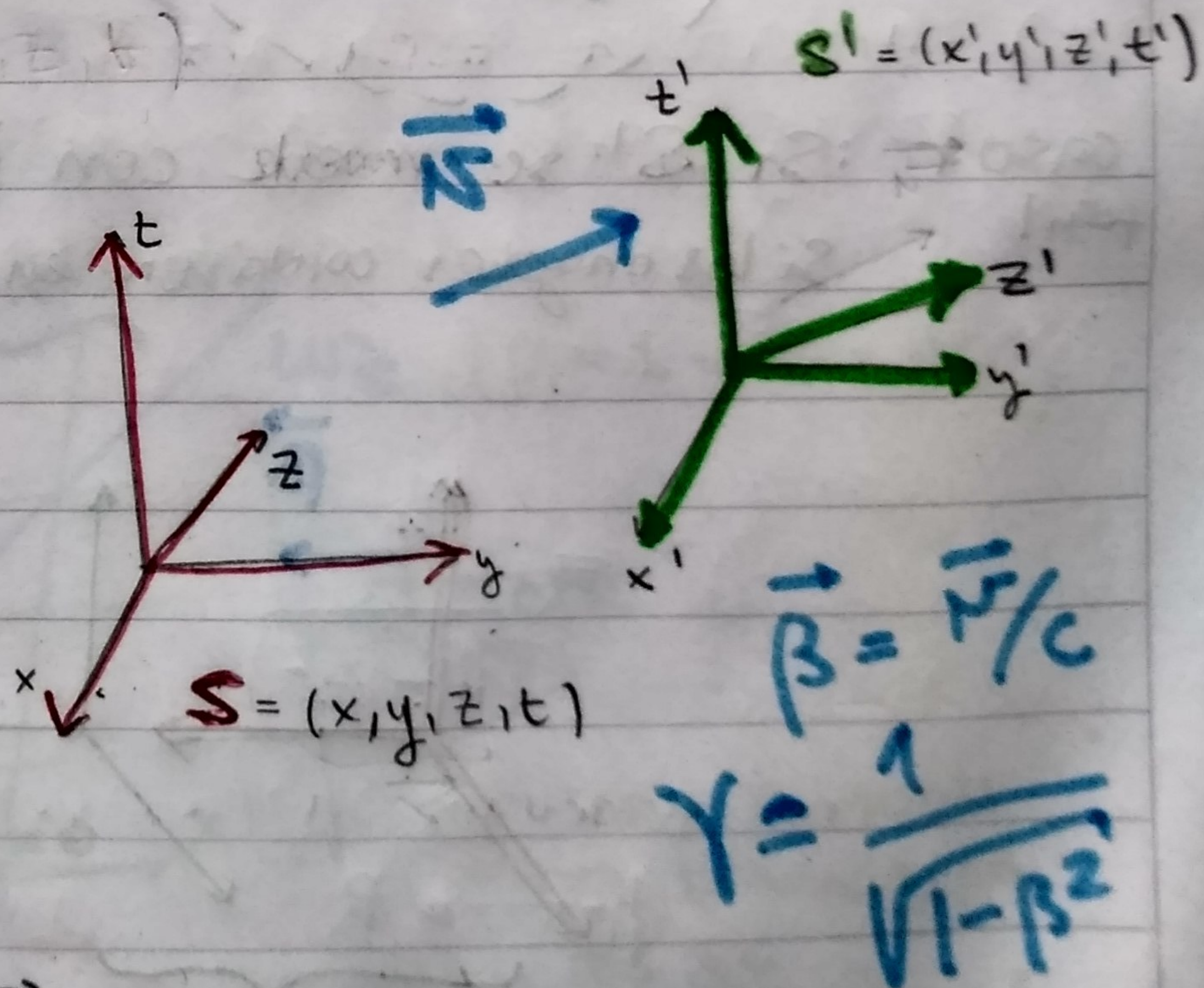
→ ESTO IMPLICA QUE LAS TRANSFORMACIONES de GALILEO están MAL.

Dos sistemas inerciales S y S' se relacionan por transformaciones independientes de la medida del tiempo en cada uno (rotaciones, traslaciones, etc.) o por las transformaciones de Lorentz:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma (x - \beta_x ct) \\ y' = \gamma (y - \beta_y ct) \\ z' = \gamma (z - \beta_z ct) \\ ct' = \gamma (ct - (\beta_x x + \beta_y y + \beta_z z)) \end{array} \right.$$

$$\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$$

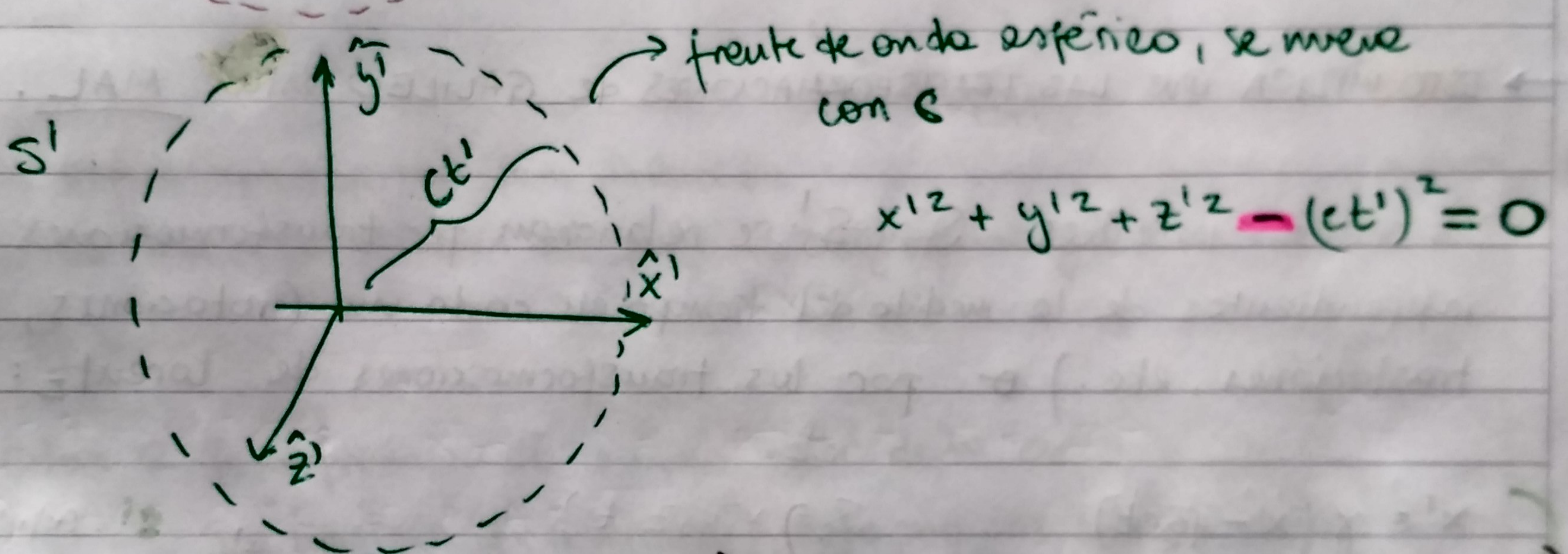
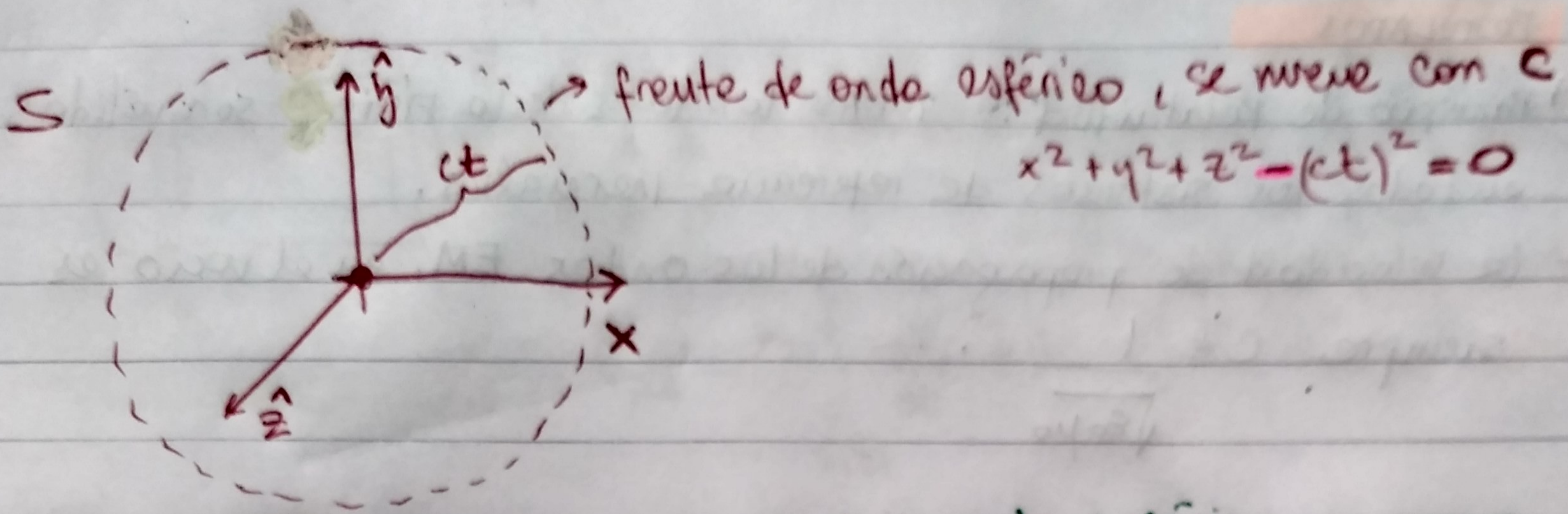
$$\gamma(\beta) = \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{\beta})^{1/2}}$$



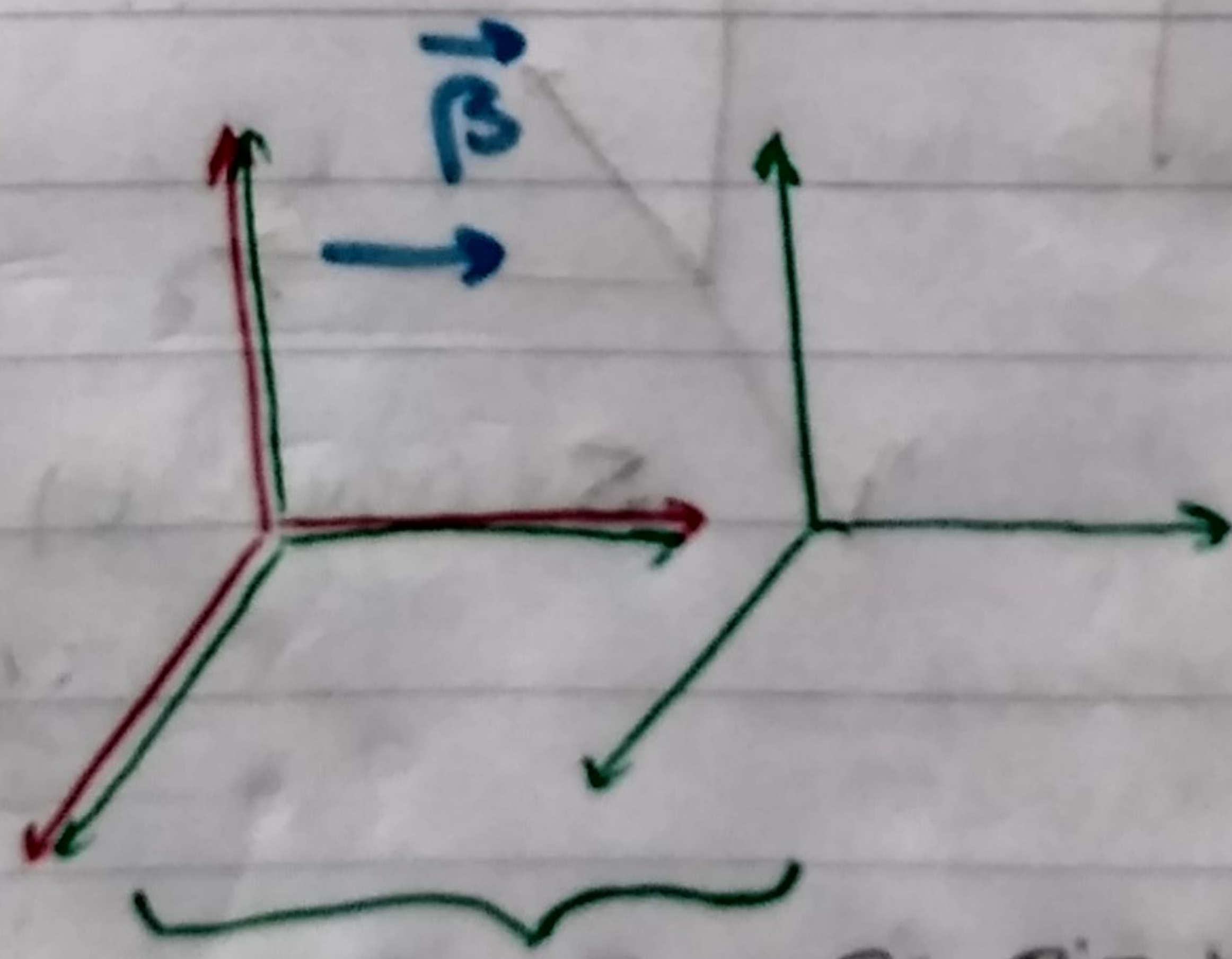
VEREMOS QUE

- El conflicto 1 se resuelve porque \vec{E} y \vec{B} en S pasan a ser \vec{E}' y \vec{B}' en S' (y eso cambia nuestra interpretación del fenómeno).
- El conflicto 2 se resuelve porque las T. Lorentz implican que un objeto viajando con velocidad c en S también se mueve con velocidad c en S' .

¿Cómo se pueden deducir las transformaciones de Lorentz? (T.L.)



caso: Si S y S' se mueven con $\vec{\beta} = \beta \hat{x} \equiv \beta \hat{x}'$ (configuración estándar).
 Si los orígenes coinciden en $t=0$ y $t'=0$:

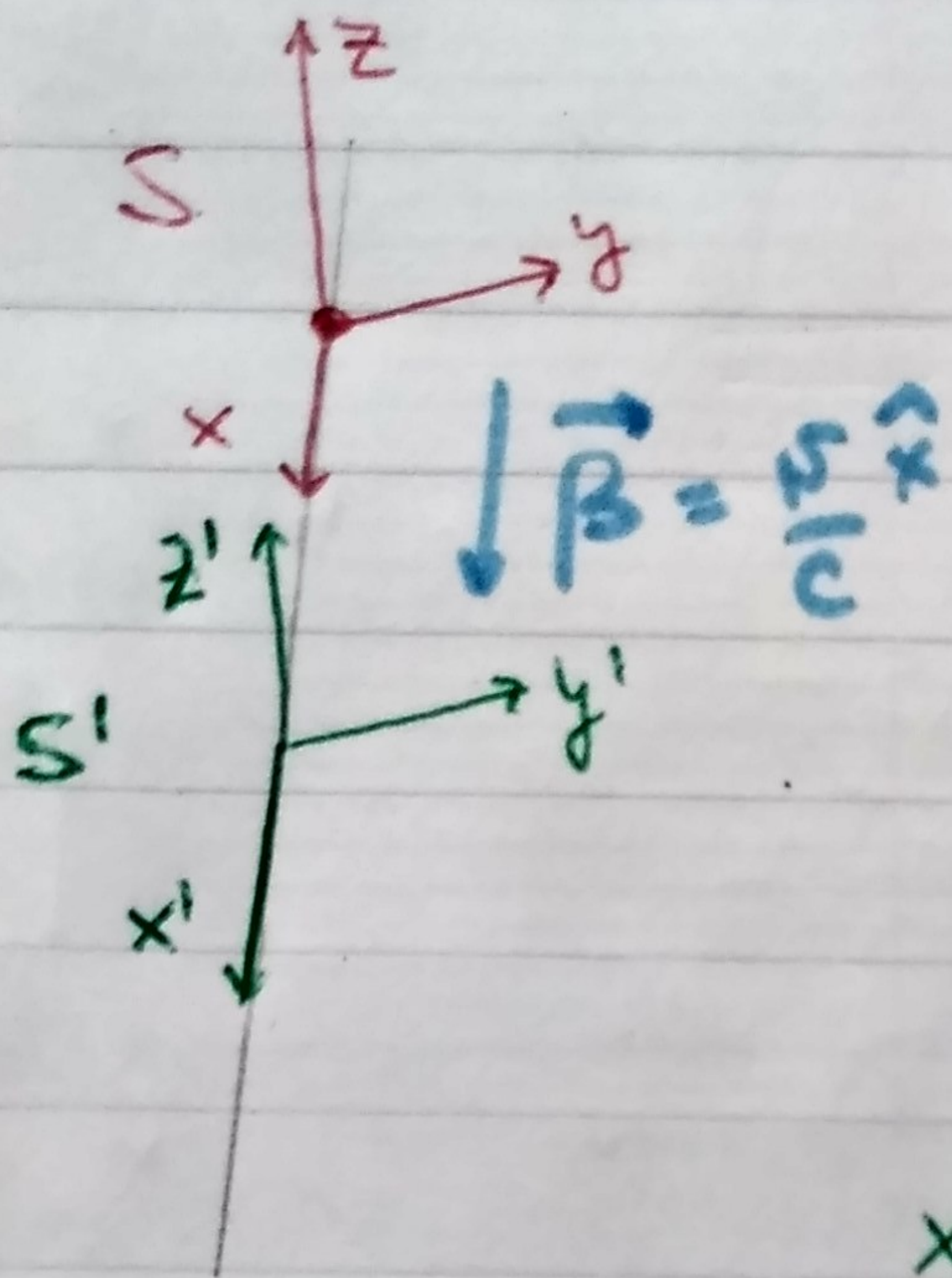


SE PIENSA UN RATO ACA...

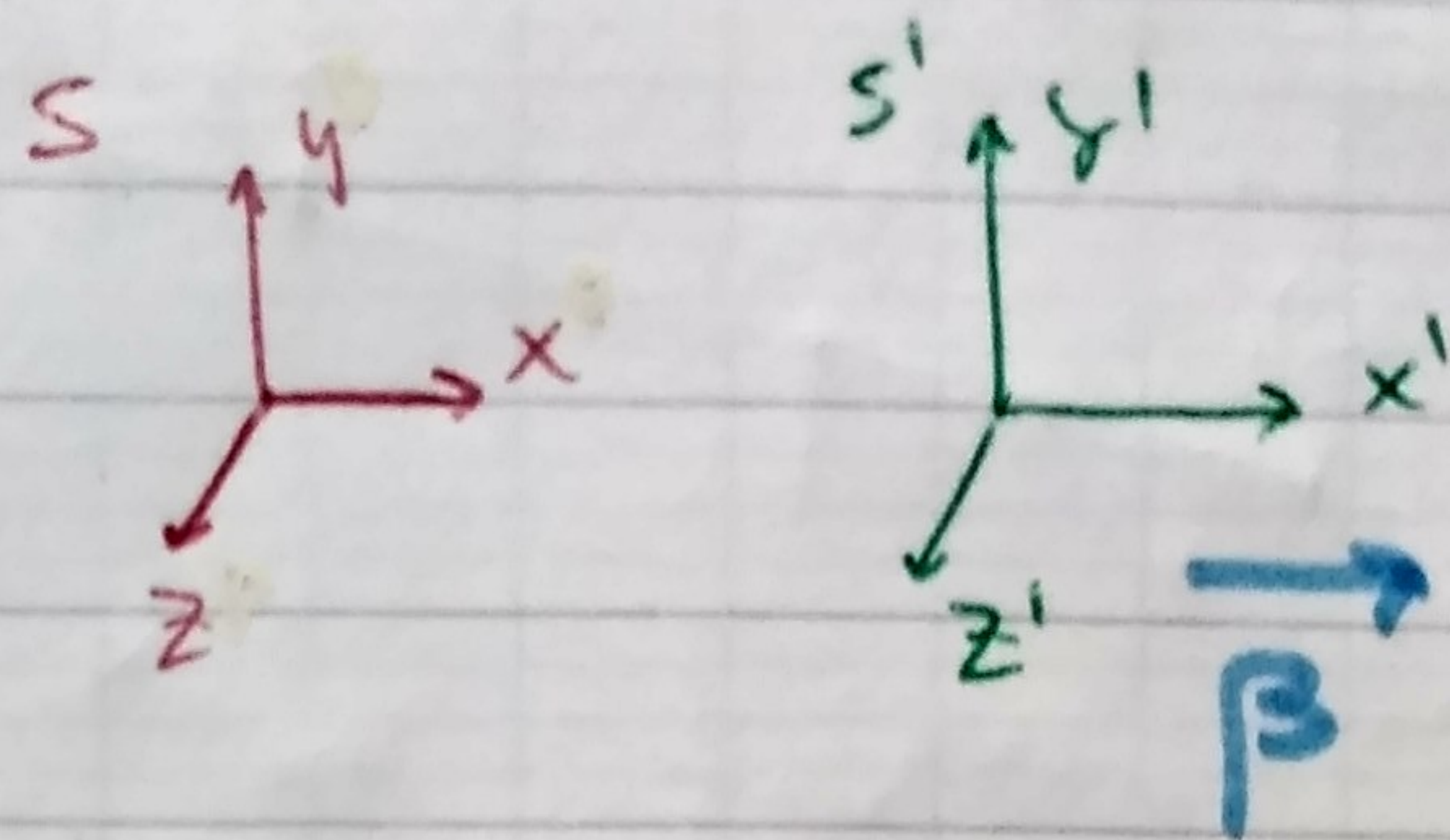
los T.L. dejan al frente de onda invariante
 (profundizaremos...).

II) TRANSFORMACIONES DE LORENTZ : Geometría de la relatividad especial.

CASO FÁCIL: Configuración estándar



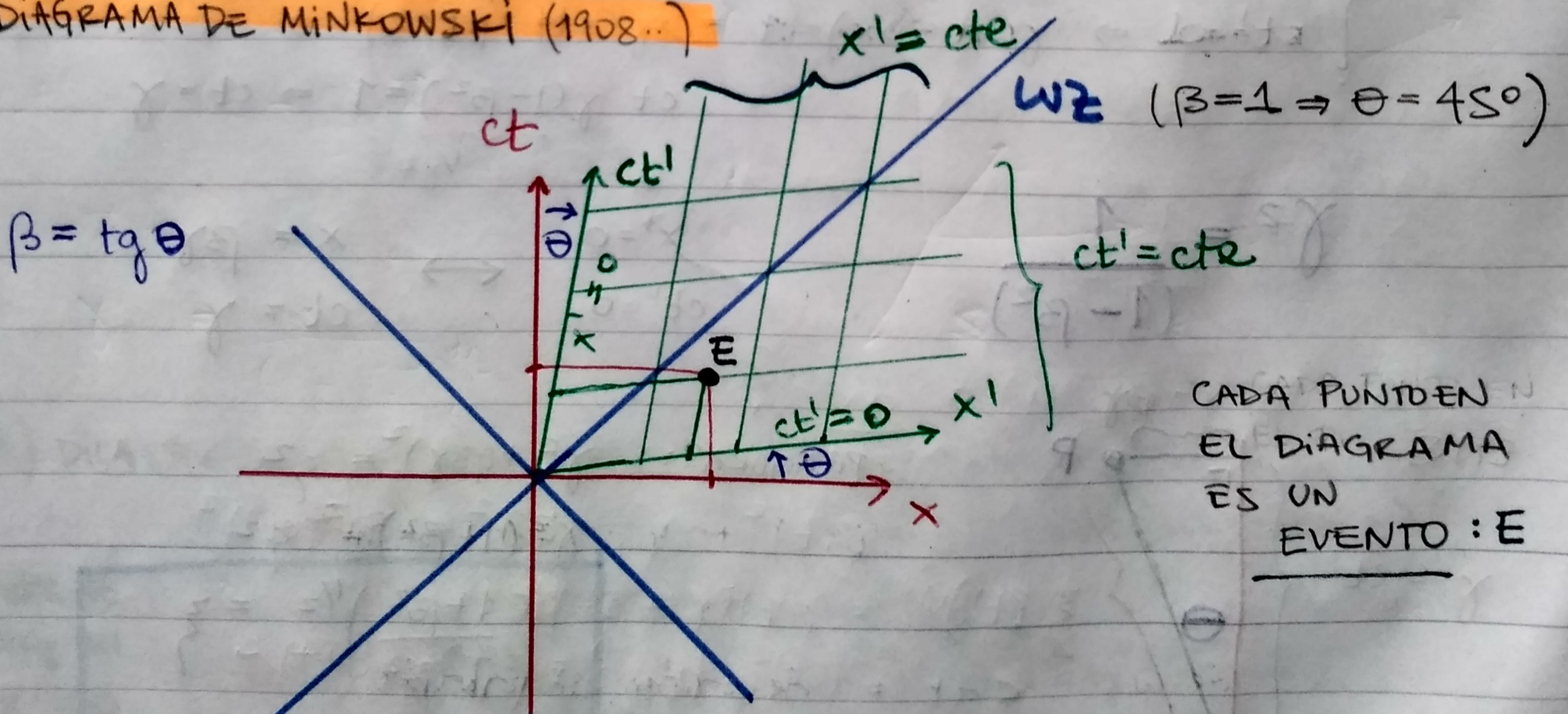
Más usual:



$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} > 1$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma(ct - \beta x) \end{aligned}$$

DIAGRAMA DE MINKOWSKI (1908..)



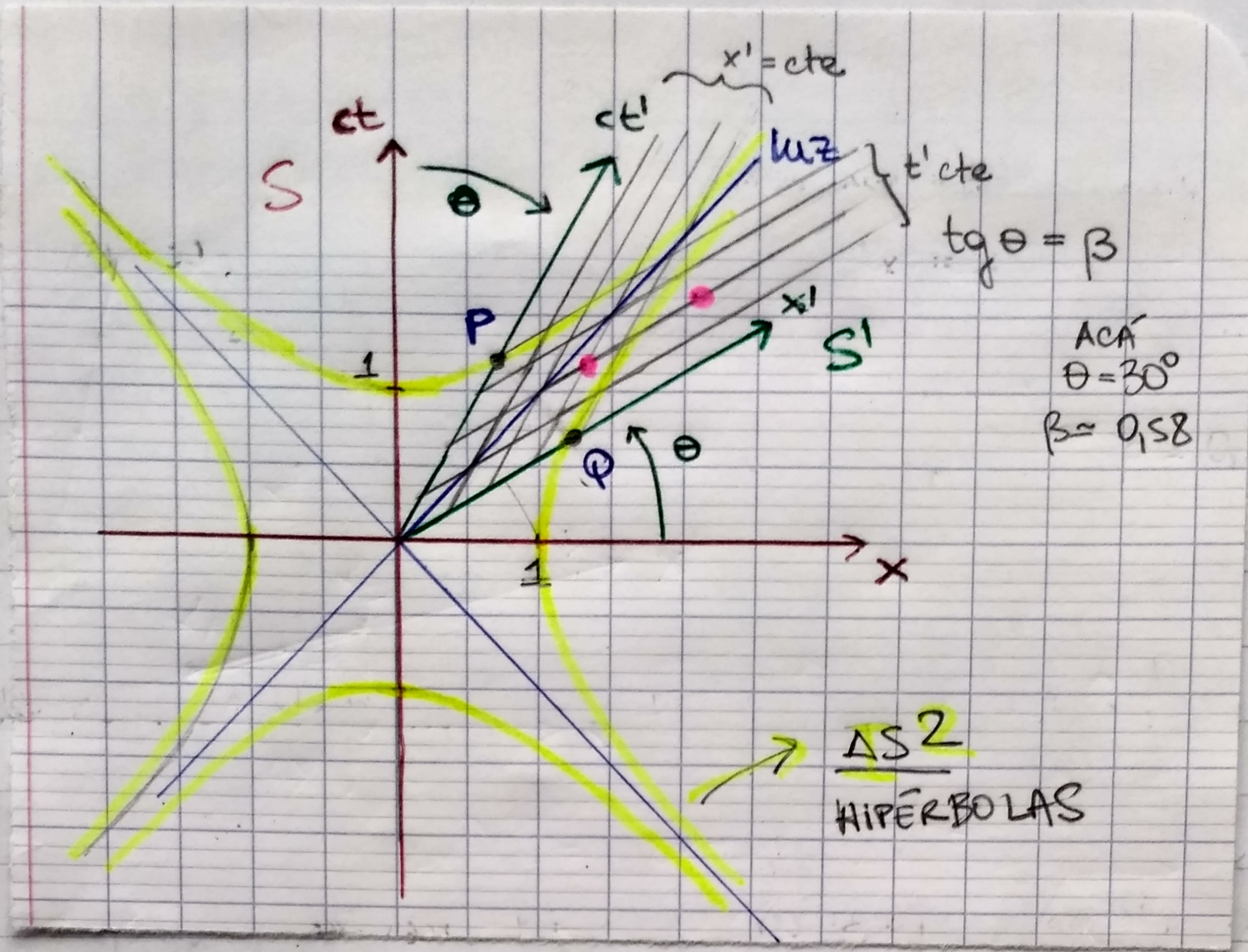
1) Eje ct' :

$$x' = 0 \Rightarrow x = \beta ct \Rightarrow ct' = \frac{1}{\beta} x \Rightarrow \text{Recta de pendiente } 1/\beta$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\text{PENDIENTE}} = \beta$$

2) Eje x' : (más fácil)

$$ct' = 0 \Rightarrow ct = \beta x \Rightarrow \text{Recta de pendiente } \beta = \tan \theta$$



OBSERVEMOS:

1) Hipérbolas: $x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 = AS^2$ CONSTANTE

2) CAMBIO DE ESCALA:

P: $\begin{cases} x' = 0 \Rightarrow \gamma(x - \beta ct) = 0 \Rightarrow x = \beta ct \\ ct' = 1 \Rightarrow \gamma(ct - \beta x) = 1 = \gamma(ct - \beta^2 ct) \end{cases}$

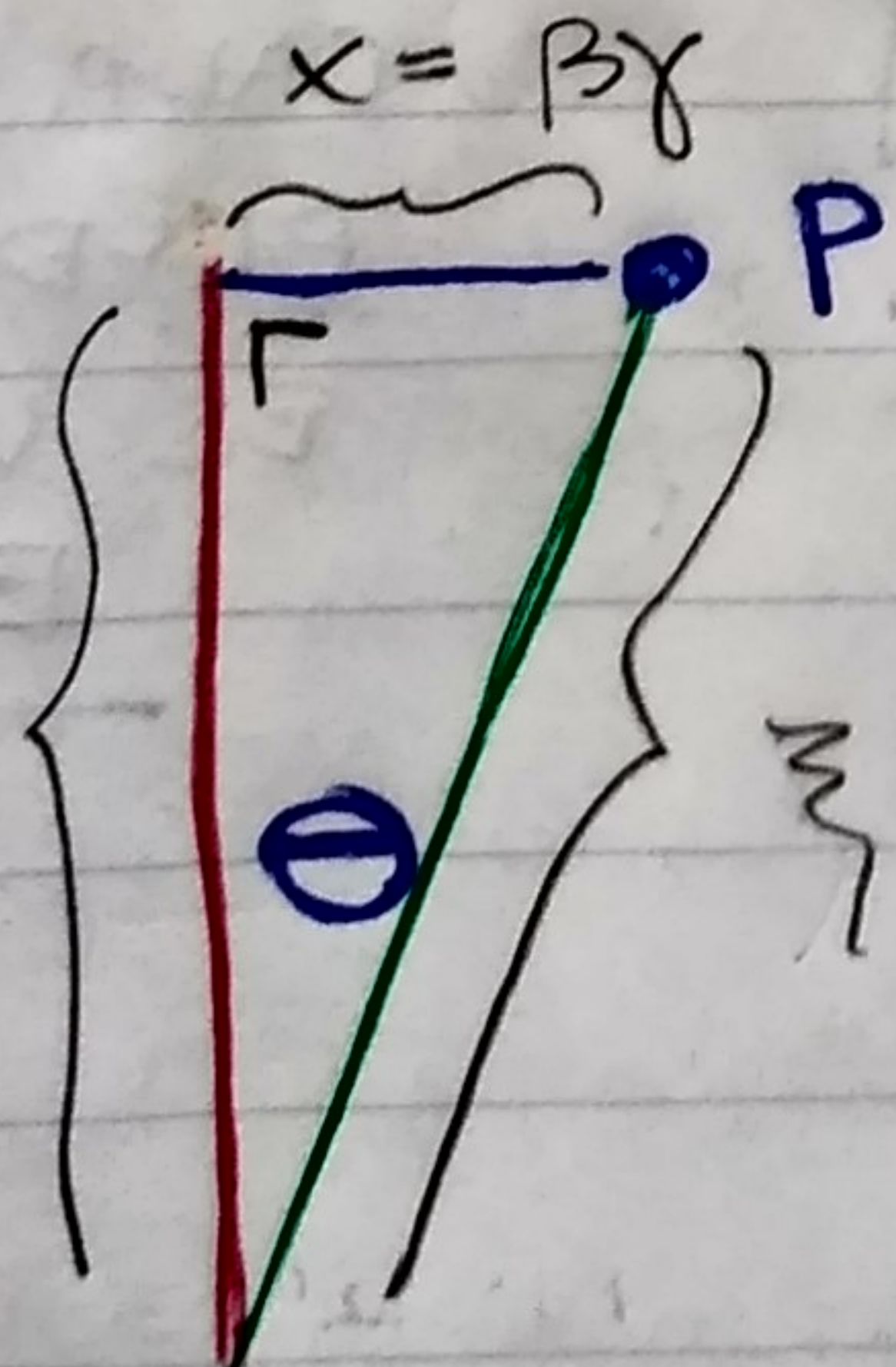
$ct \gamma(1 - \beta^2) = 1 \Rightarrow ct = \gamma$

$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$

$\begin{matrix} x' = 0 \\ ct' = 1 \end{matrix} \leftrightarrow \begin{matrix} x = \beta \gamma \\ ct = \gamma \end{matrix}$

ENS

$\gamma = ct$



PIRÁGORAS:

$\gamma^2 + (\beta \gamma)^2 = \gamma^2$

$\gamma^2(1 + \beta^2) = \gamma^2$

$\left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} = \gamma$
 FACTOR DE ESCALA

Q: $\begin{cases} ct' = 0 \Rightarrow \gamma(ct - \beta x) = 0 \Rightarrow ct = \beta x \\ x' = 1 \Rightarrow \gamma(x - \beta ct) = 1 \Rightarrow \gamma(x - \beta^2 x) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\gamma(1 - \beta^2)} = \gamma \end{cases}$

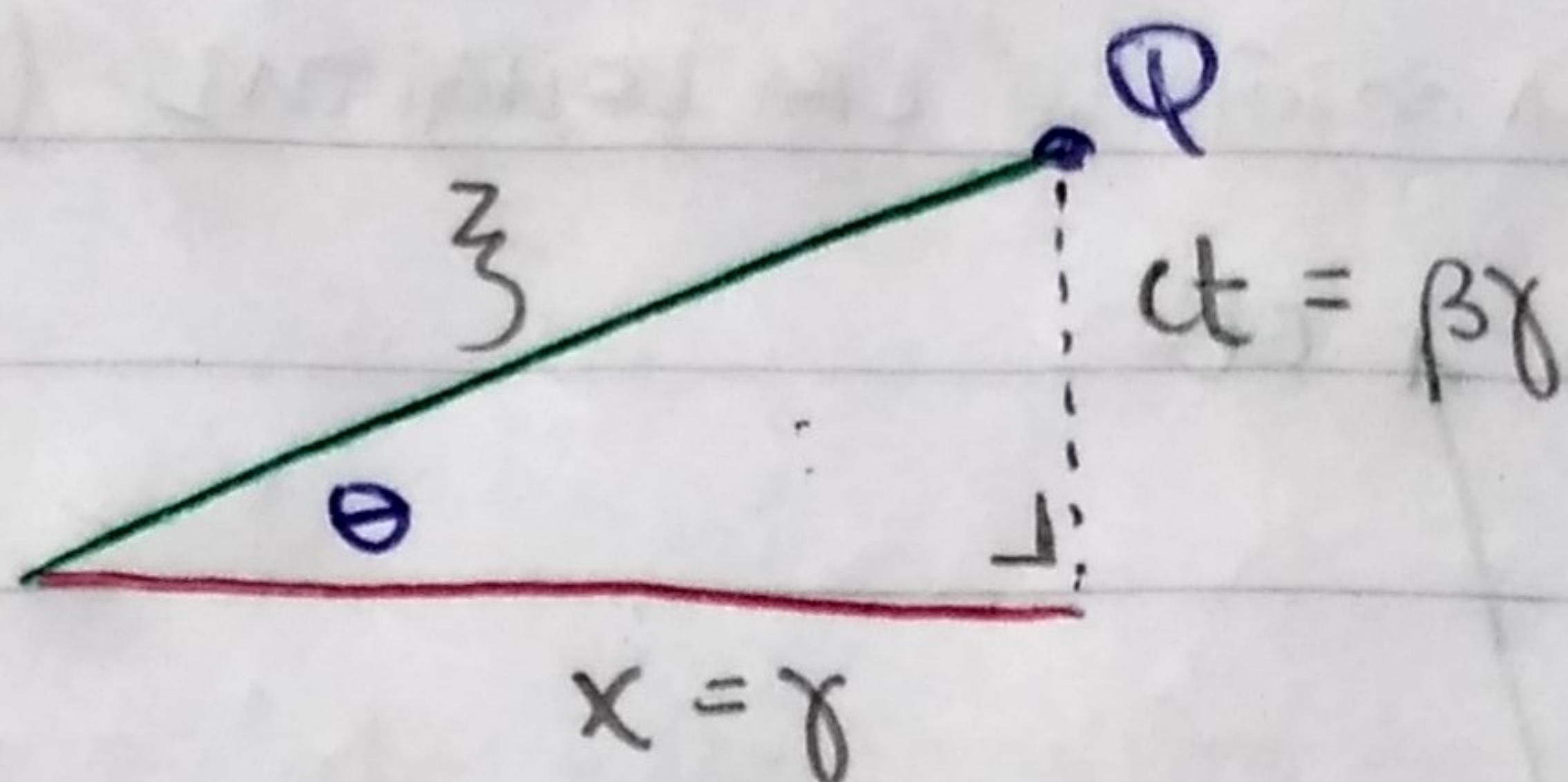
$$ct' = 0 \iff ct = \beta x = \beta \gamma$$

$$x' = 1 \iff x = \gamma$$

De memo

$$\xi^2 = (\beta \gamma)^2 + \gamma^2$$

$$\xi = (\gamma^2 (1 + \beta^2))^{1/2} = \left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right)^{1/2}$$



FACTOR DE ESCALA

Si un intervalo tiene longitud unidad en un sistema, en el otro vale ξ .

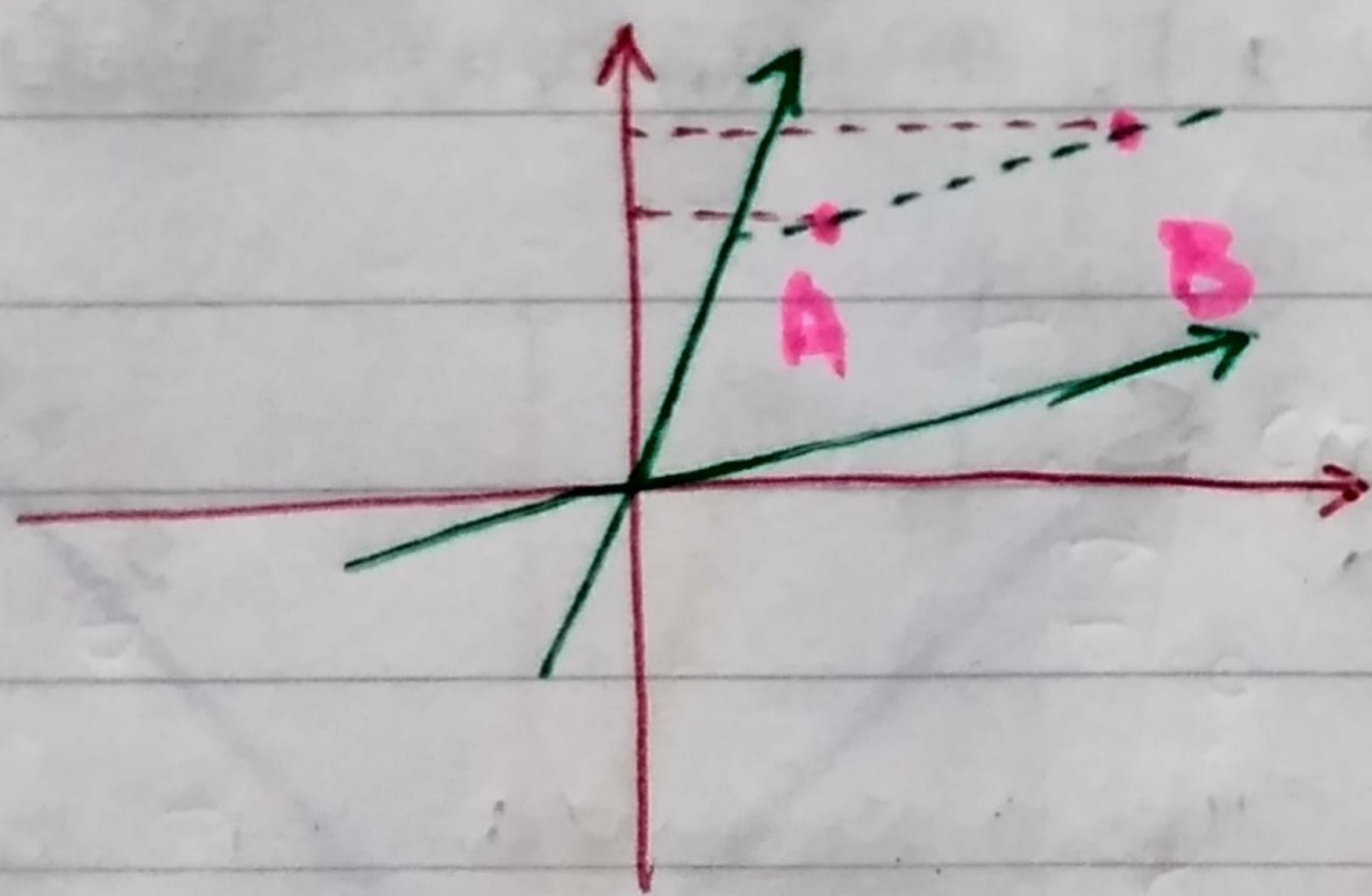
$$U = U' \xi = U' \left(\frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \right)^{1/2} \quad (\gamma \text{ VICEVERSA})$$

INTERVALO CORRESPONDIENTE

INTERVALO UNIDAD, temporal o espacial

(predecir: $c \Delta t' = 1$ o $\Delta x' = 1$)

3) RELATIVIDAD DE LA SIMULTANEIDAD



A y B son simultáneos en S'

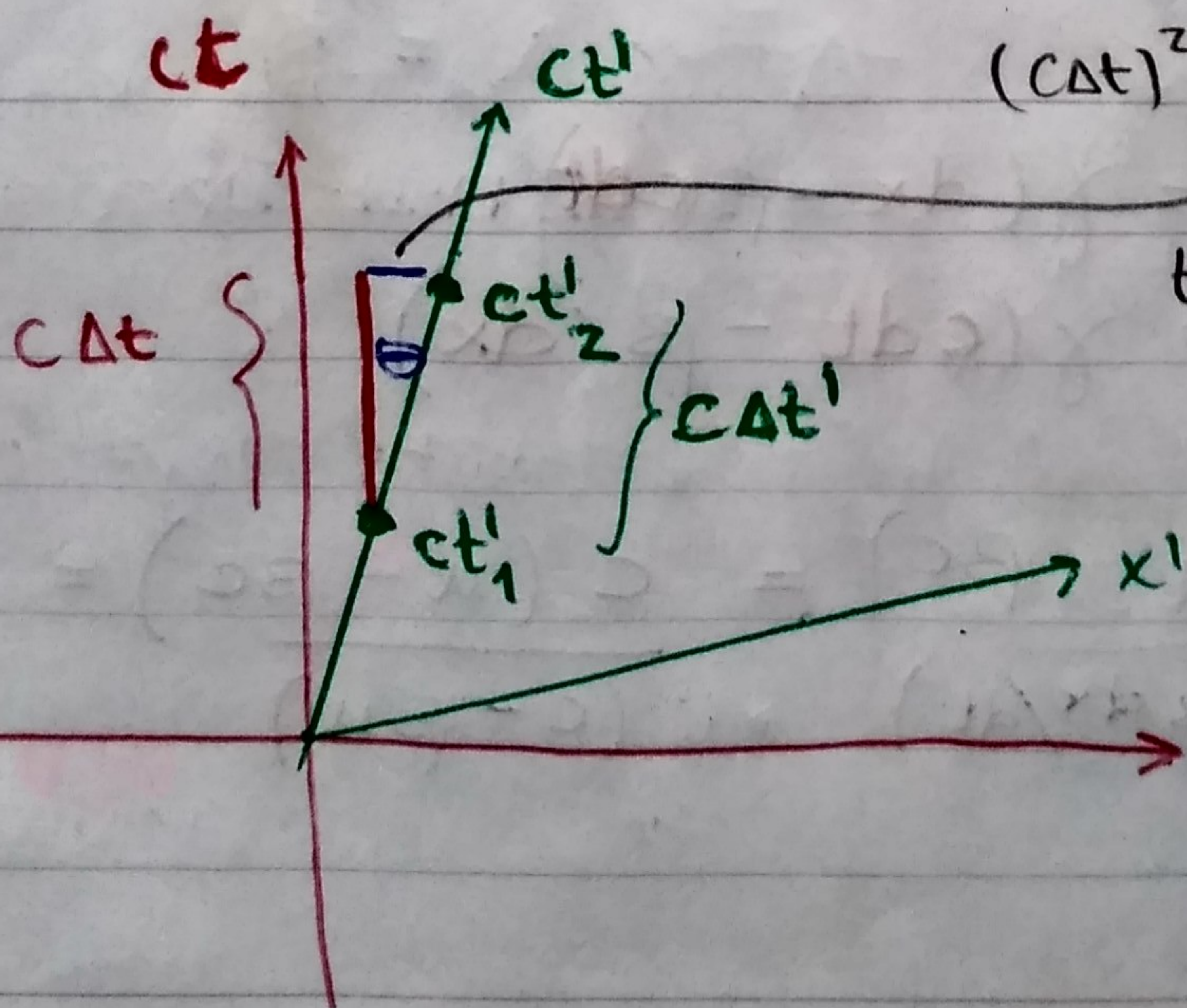
Pero A está antes que B en S

4) DILATACIÓN DEL TIEMPO:

Miremos el triángulo en S:

$$(c \Delta t)^2 + (\beta c \Delta t)^2 = (c \Delta t' \xi)^2$$

Ticks de reloj en $x' = 0$ (fijo en S')



$$\text{tgo} = \frac{\text{cat. op.}}{\text{cat. ady}} = \beta$$

$$c^2 \Delta t^2 (1 + \beta^2) = c^2 \Delta t'^2 \xi^2$$

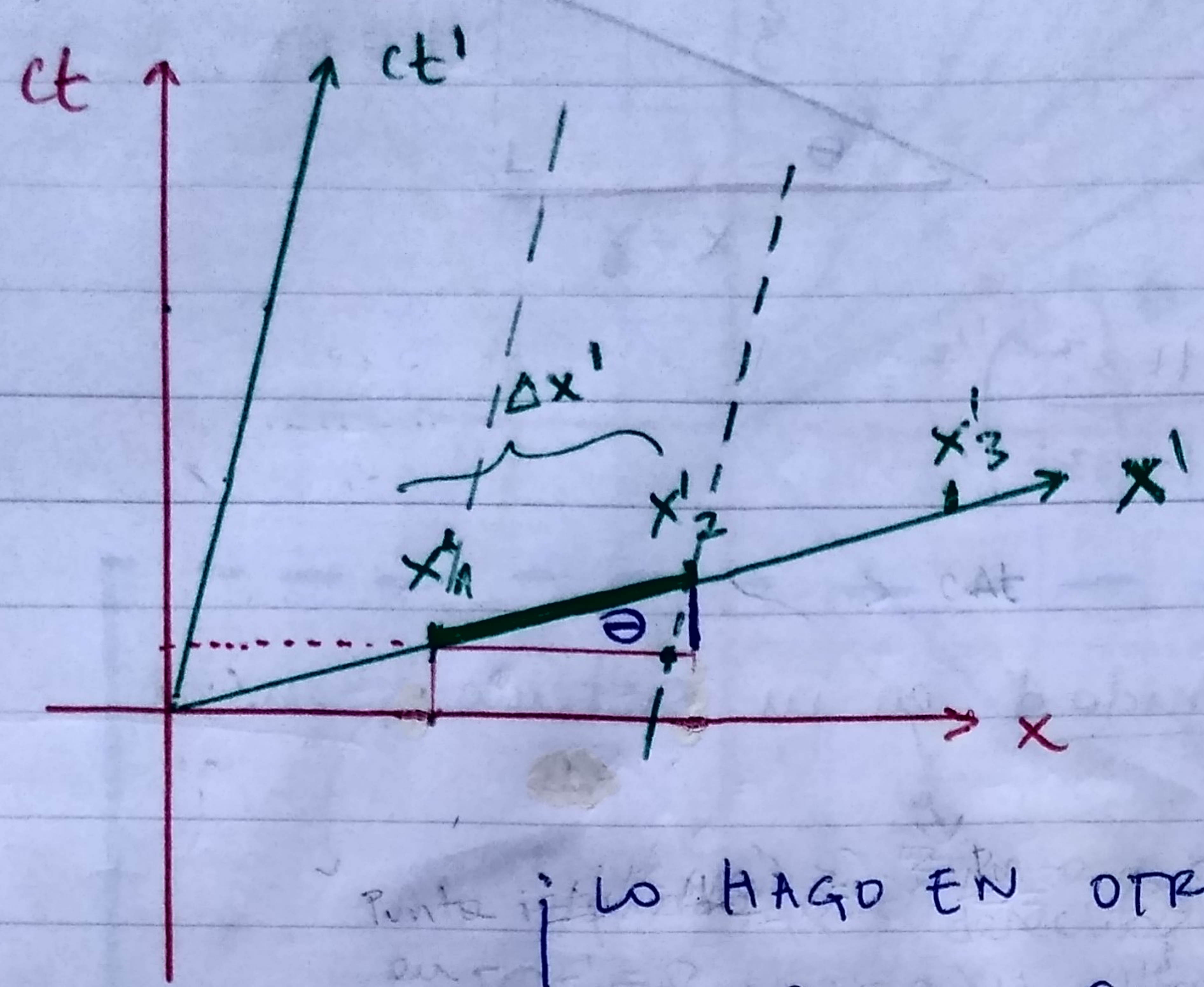
$$\Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$$

Cualquier otro obs. mide un tiempo MAYOR

Tiempo PROPIO (donde el reloj está quieto)

5) CONTRACCIÓN DE LA LONGITUD (EN LA DIRECCIÓN DEL MOVIMIENTO RELATIVO)

Regla que mide $\Delta x'$ en S'



¡Lo HAGO EN OTRO PDF!

Contracción de la longitud

con diagrama de Minkowski

6) ADICIÓN DE VELOCIDADES

Una cosa se mueve con velocidad u en S

$$u = \frac{dx}{dt}$$

¿Cuánto vale $u' = \frac{dx'}{dt'}$?

$$u = \frac{dx}{dt}$$

$$dx' = \gamma(dx - \beta c dt)$$

$$c dt' = \gamma(c dt - \beta dx)$$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma dt (dx/dt - \beta c)}{\gamma dt (c - \beta dx/dt)} = \frac{c(u - \beta c)}{c - \beta u} = \frac{u - v}{1 - uv/c^2}$$

En general: Si $\vec{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z) = \left(\frac{v_x}{c}, \frac{v_y}{c}, \frac{v_z}{c}\right)$

$$\vec{x} = (x, y, z)$$

la relación entre las velocidades:

$$ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x})$$

$$x' = \gamma(x - \beta_x ct)$$

$$y' = \gamma(y - \beta_y ct)$$

$$z' = \gamma(z - \beta_z ct)$$

$$u_x = \frac{u'_x + v_x}{1 + \beta u'_x/c}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta u'_x/c}$$

$$u_z = \frac{u'_z \sqrt{1-\beta^2}}{1 + \beta u'_x/c}$$

Fíjense que se resuelve el CONFLICTO 2: $u'_x = c \Leftrightarrow u_x = c$

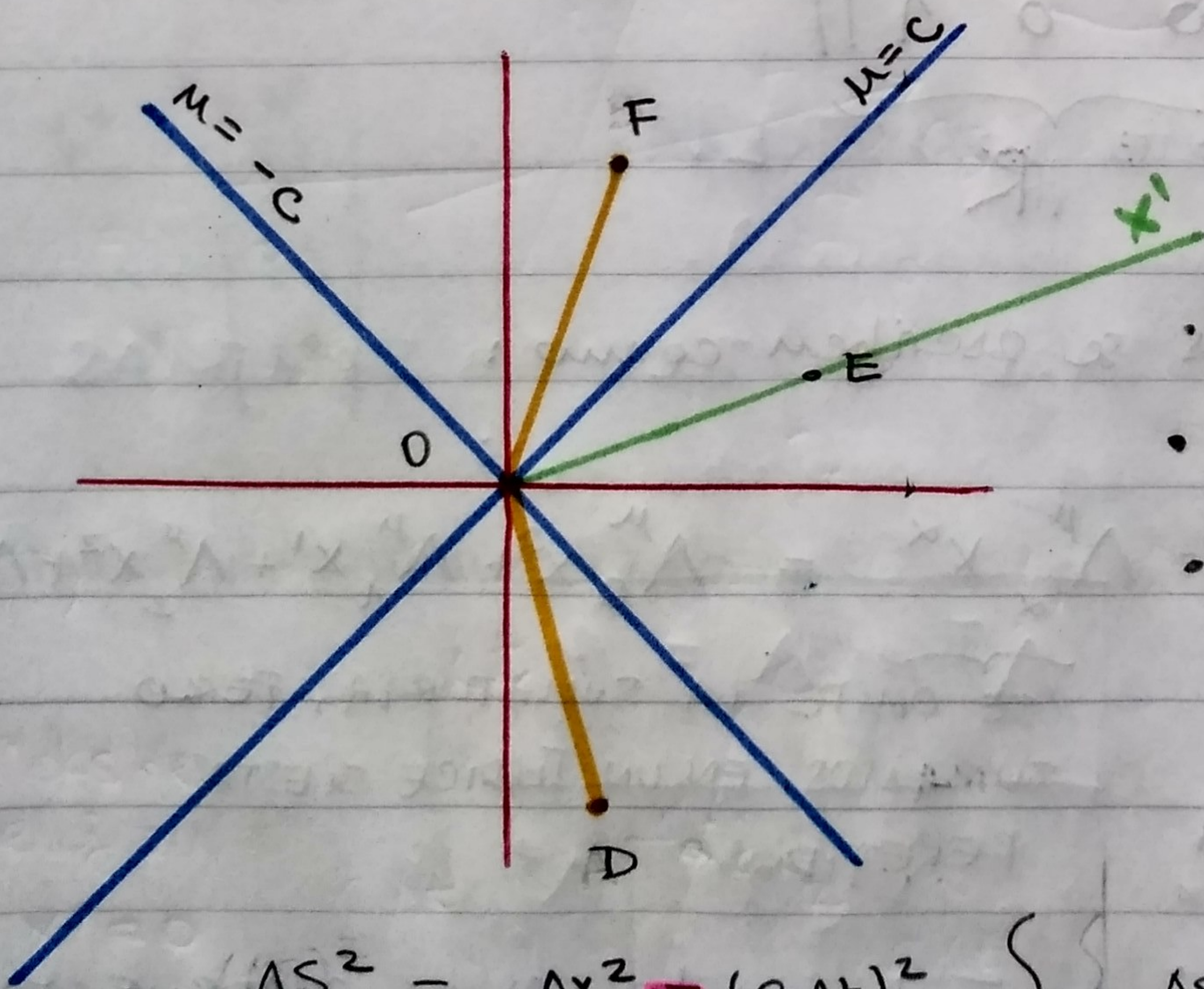
$$c = \frac{c + v_x}{1 + \beta}$$

$$(1 + \beta)$$

$$c(1 + \beta) = c(1 + \beta) \quad \checkmark$$

la T.L. no cambia la posición del "rayo de luz", está siempre en la bisectriz de los ejes.

7) INTERVALO INVARIANTE (Y CAUSALIDAD)



Si un punto está de un lado u otro de la línea mundo de la luz, no va a cambiar de lado al hacer una T.L.

- D está en el PASADO de O
- F está en el FUTURO de O
- E está en el PRESENTE de O:

$\exists S'$ tq. O y E son SIMULTÁNEOS

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - (c\Delta t)^2$$

OJO

$\Delta s^2 > 0$: los eventos son TIPO ESPACIO (No están CAUSALMENTE CONECTADOS)

$\Delta s^2 = 0$: los eventos están conectados por UN RAYO de LUZ (TIPO LUZ)

$\Delta s^2 < 0$: los eventos están en el futuro (pasado) del otro TIPO TIEMPO