# III) Estructura del espacio-tiempo. Las T.L. como un GRUPO de TRANSFORMACIONES LINEALES

## CUADRIVECTORES

$x^\mu$ $\quad \mu = 0,1,2,3$ → índices con letra GRIEGA minúscula

$x^0 = ct$

$x^1 = x$

$x^2 = y$

$x^3 = z$

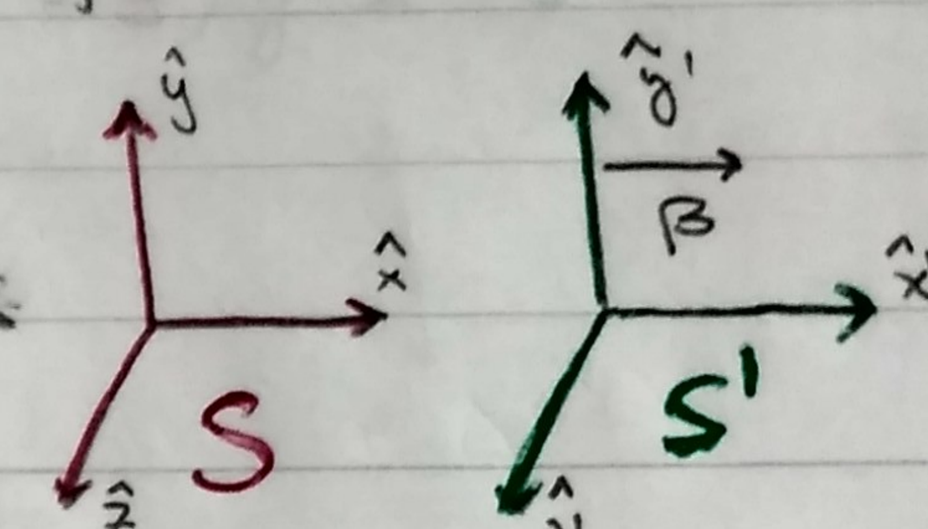
$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

4-vector contravariante (índice arriba, vector "parado")

**T. de Lorentz (propias):**

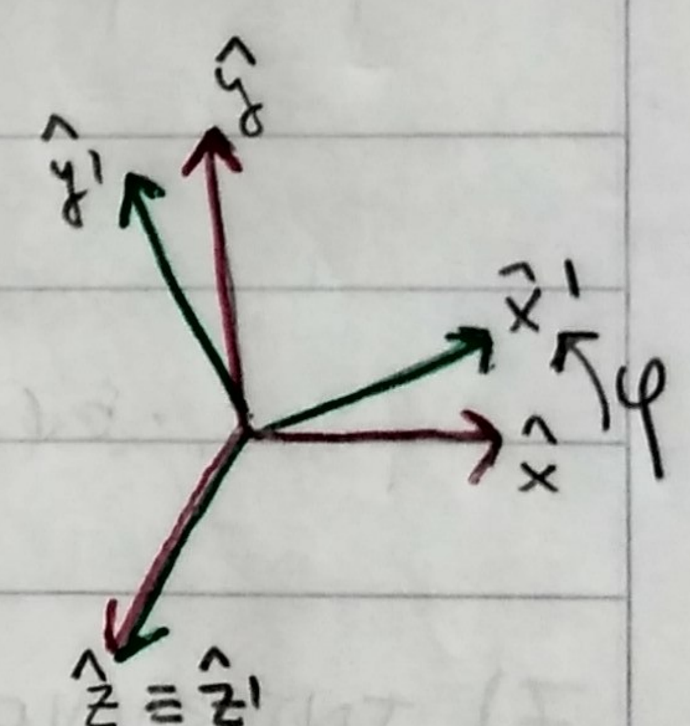
- Para un BOOST con $\vec{\beta} = \beta \hat{x}$ en el eje $\hat{x}$:

$$\Lambda^\delta{}_\rho = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\rho \text{ columnas}} \Big\} \delta \text{ filas}$$




- Para una ROTACIÓN de eje $\hat{z}$ y ángulo $\varphi$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$




- Las transformaciones de coordenadas se escriben como:

$$x'^\mu = \sum_{\alpha=0}^{3} \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \equiv \underbrace{\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha}_{} = \Lambda^\mu{}_0 x^0 + \Lambda^\mu{}_1 x^1 + \Lambda^\mu{}_2 x^2 + \Lambda^\mu{}_3 x^3$$

$\mu$ → filas; $\alpha$ → columnas

Notación de Einstein

SE OMITE LA SUMATORIA, PERO SUMAMOS EN UN ÍNDICE SI ESTÁ REPETIDO

**Def:** Una cuaterna que transforma así por T. de Lorentz, es un CUADRIVECTOR

Explícitamente : BOOST en eje $\hat{x}$

$$x^{\sigma\prime} = \Lambda^{\sigma}_{\ \gamma}\, x^{\gamma} \; : \; S' \begin{cases} x^{0\prime} = \gamma x^0 - \gamma\beta x^1 = \gamma(x^0 - \beta x^1) = \gamma(ct - \beta x) \\ x^{1\prime} = -\gamma\beta x^0 + \gamma x^1 = \gamma(x^1 - \beta x^0) = \gamma(x - \beta ct) \\ x^{2\prime} = x^2 = y \\ x^{3\prime} = x^3 = z \end{cases} \quad S$$

- los (matrices de las) T.L. forman un GRUPO (el de las T.L. propias)
  - El PRODUCTO matricial también es una T.L.
  - la Identidad es una T.L.
  - Tienen inversa: BOOST $(-\vec{\beta})$ , ROTACIÓN ($-\varphi$ en eje $\hat{z}$)

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R^T & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

- Se puede definir un PRODUCTO INTERNO y hay una noción de norma.

$$a^{\mu} = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \underbrace{a_{\mu}}_{\text{4-vector COVARIANTE}} = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

$$b^{\alpha} = \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} \qquad \text{Def: } a \cdot b = a_{\gamma} b^{\gamma} = (-a^0, a^1, a^2, a^3) \begin{pmatrix} b^0 \\ b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$$

$$= -a^0 b^0 + \underbrace{a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3}_{\vec{a}\cdot\vec{b}}$$

Podemos inventar un artefacto para poner este signo de $-$ : ¡la MÉTRICA!

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\nu} = (-a^0, a^1, a^2, a^3)$$

la métrica Minkowskiana BAJA ÍNDICES

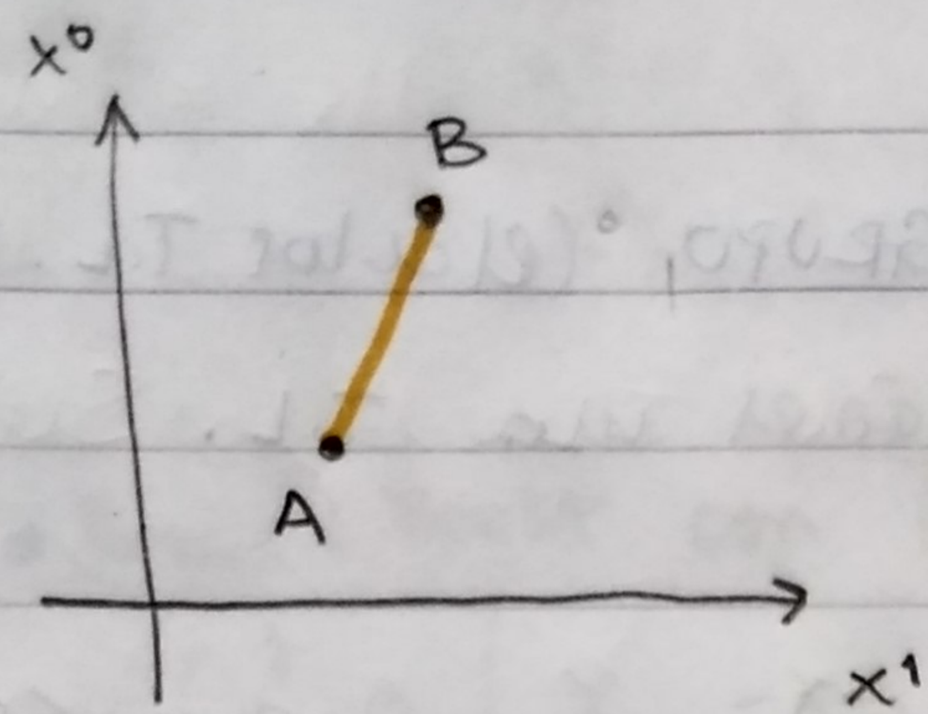
$$a \cdot b = a_{\mu} b^{\mu} = \eta_{\mu\nu} a^{\nu} b^{\mu}$$

Tiene inversa: $\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Intervalo invariante $\Delta s^2$

$$\Delta x^\alpha = \left(x_A - x_B\right)^\alpha \qquad \Delta x^\alpha = \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta x^1 \\ \Delta x^2 \\ \Delta x^3 \end{pmatrix}$$

$$x_A^\alpha = \begin{pmatrix} x^0_A \\ x^1_A \\ x^2_A \\ x^3_A \end{pmatrix}$$




Entonces: $\Delta x^\alpha \Delta x_\alpha = \Delta x_\alpha \Delta x^\alpha = -(\Delta x^0)^2 + \underbrace{(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2}$

$$= -c^2(\Delta t)^2 + (\overrightarrow{\Delta x})^2 = \Delta s^2$$

la NORMA de este vector no es siempre positivo,

ya vimos que
$$\begin{cases} \Delta s^2 = \Delta x_\alpha \Delta x^\alpha > 0 \Rightarrow \Delta x \text{ es tipo ESPACIO} \\ \Delta s^2 < 0 \Rightarrow \Delta x \text{ es tipo TIEMPO} \\ \Delta s^2 = 0 \Rightarrow \Delta x \text{ es tipo LUZ} \end{cases}$$

- El producto escalar es INVARIANTE bajo T.L. (vale lo mismo en todos los sistemas inerciales).

$$a_\mu b^\mu = a'_\mu b'^\mu$$

Porque los T.L. son ISOMETRÍAS del espacio-tiempo:

$$\boxed{\Lambda^T \eta \Lambda = \eta}$$

$$a \cdot b = a'_\mu b'^\mu = \eta_{\mu\nu} a'^\nu b'^\mu = \eta_{\mu\nu} \underbrace{\Lambda^\nu{}_\alpha a^\alpha}_{a'^\nu} \underbrace{\Lambda^\mu{}_\delta b^\delta}_{b'^\mu}$$

$$= \underbrace{\Lambda^\nu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\delta}_{\eta_{\alpha\delta}} a^\alpha b^\delta$$

- UN OBJETO QUE NO CAMBIA AL HACER T.L. es un ESCALAR de LORENTZ

¿Qué objetos tenemos? ¿Cómo transforman bajo T.L.?

CUADRIVECTORES : $a^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta}\, a^{\beta}$

ESCALARES : $k' \cdot b' = k'_{\alpha}\, b^{\alpha'} = k_{\alpha}\, b^{\alpha} = k \cdot b$

CUADRI-TENSORES : $T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\, \Lambda^{\nu}{}_{\delta}\, T^{\alpha\delta}$

$\vec{E}$ y $\vec{B}$ van a formar parte del mismo cuadri-tensor ...