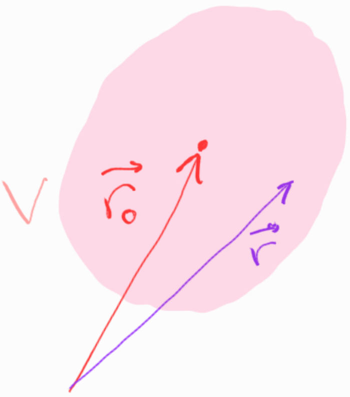
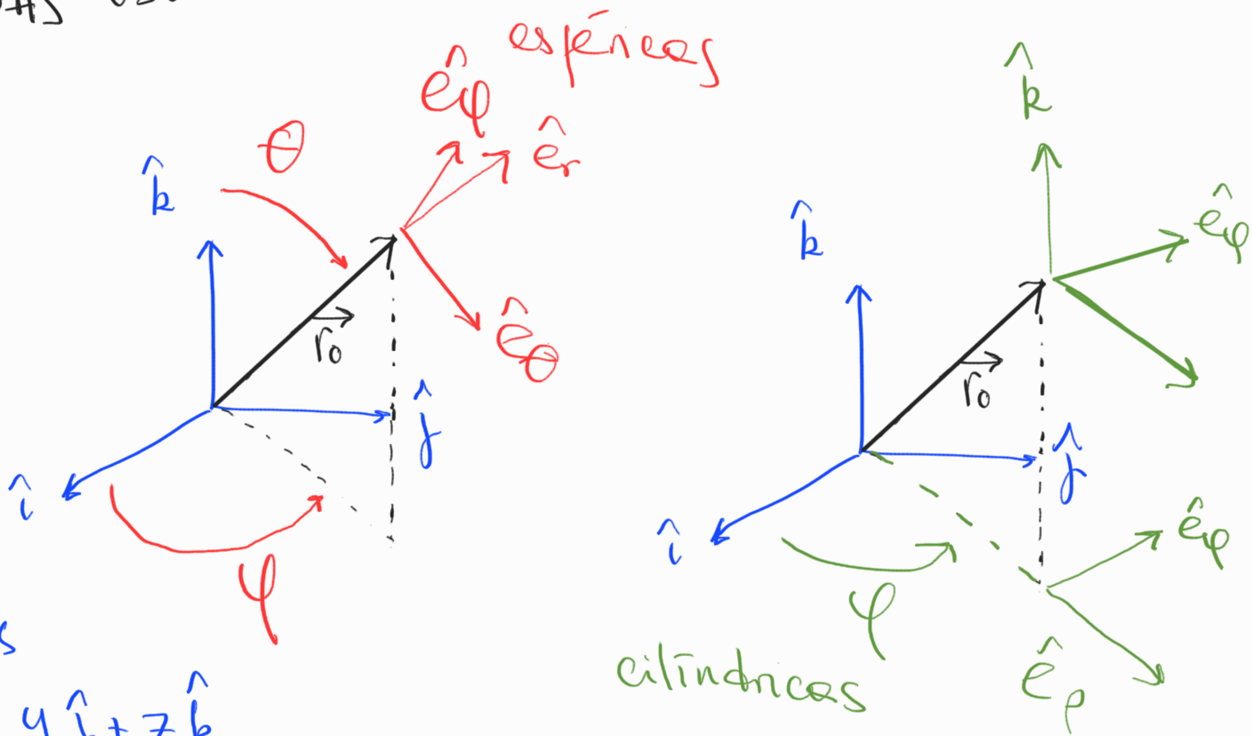
Delta de Dirac en 3D, mas aclaraciones.



Def:

$$\int_V d^3\vec{r}\, \delta(\vec{r}-\vec{r_0}) f(\vec{r}) = \begin{cases} f(\vec{r_0}) & \text{si } r_0 \in V \\ 0 & \text{si } r_0 \notin V \end{cases}$$

COORDENADAS USUALES:



cartesianos

$\vec{r_0} = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$

$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r_0}) = \delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)$$ son 3 deltas, una en cada dimensión

$$d^3\vec{r} = dx\,dy\,dz$$

$$\int_V d^3\vec{r}\, \delta(\vec{r}-\vec{r_0}) = \int dx\, \delta(x-x_0) \int dy\, \delta(y-y_0) \int dz\, \delta(z-z_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r_0} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{r_0} \notin \end{cases}$$

CAMBIOS DE COORDENADAS

En general si $\vec{r_0} = \vec{s_0}$ representan el mismo punto de $\mathbb{R}^3$ en dos sistemas de coordenadas distintos, tenemos que

$$\int d^3\vec{r}\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r_0}) \equiv \int d^3\vec{s}\, \delta^3(\vec{s}-\vec{s_0})$$

Si hay un cambio de variables que me lleve de los coordenadas $\vec{r}$ a los $\vec{s}$, usamos el Jacobiano del cambio de coordenadas para pasar de un elemento de volumen al otro:

$$d^3\vec{r} = |J(\vec{r},\vec{s})|\, d^3\vec{s} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial s_1} & \frac{\partial r_1}{\partial s_2} & \frac{\partial r_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial s_1} & \frac{\partial r_2}{\partial s_2} & \frac{\partial r_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial s_1} & \frac{\partial r_3}{\partial s_2} & \frac{\partial r_3}{\partial s_3} \end{vmatrix} d^3\vec{s}$$

Entonces

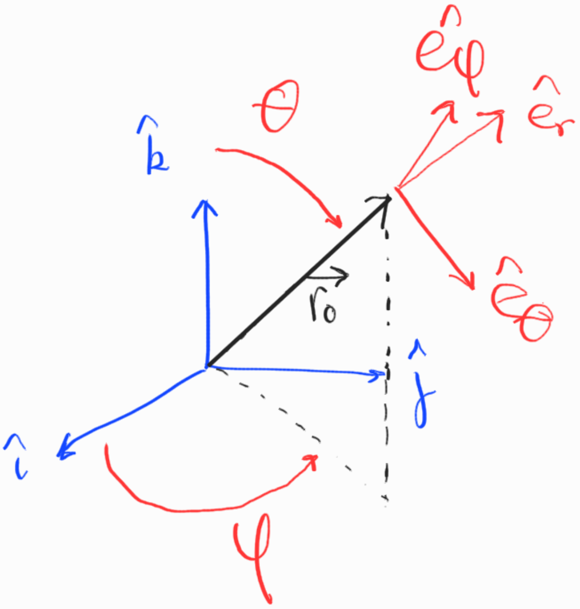
$$\int_V d^3\vec{r}\, \delta(\vec{r}-\vec{r_0}) = \int_V \frac{d^3\vec{s}}{|J(\vec{r},\vec{s})|}\, \delta(\vec{s}-\vec{s_0})$$

$$\Rightarrow \delta(\vec{r}-\vec{r_0}) = \frac{\delta(\vec{s}-\vec{s_0})}{|J(\vec{r},\vec{s})|}$$

Esto nos sirve para escribir la δ en otras coordenadas:

ESFÉRICAS

$$\vec{r}_0 = r_0\,\hat{e}_r(\theta,\varphi) = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$$



$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$

saber hacer!!

$$d^3\vec{r} = dx\,dy\,dz = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = d^3\vec{r}$$

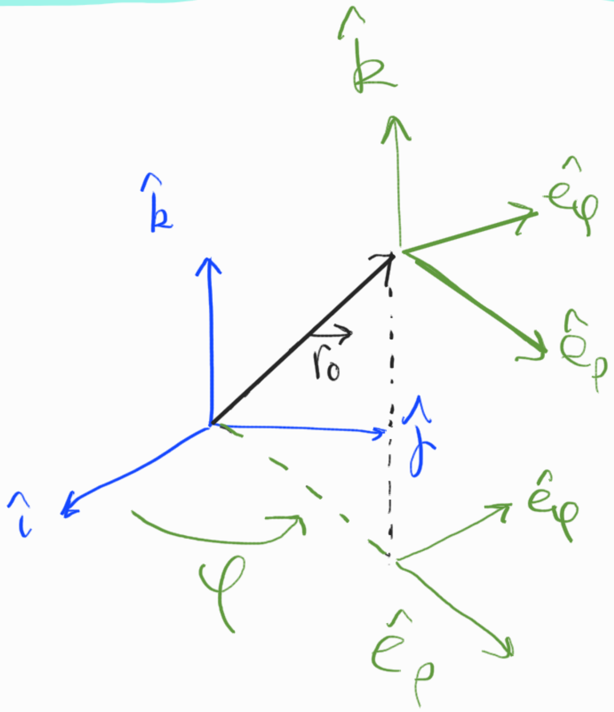
$$\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\theta}\,\delta^1(r-r_0)\,\delta^1(\theta-\theta_0)\,\delta^1(\varphi-\varphi_0)$$

$$\int_V d^3\vec{r}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = \int \frac{dr\, r^2\,\delta^1(r-r_0)}{r^2}\int\frac{d\theta \operatorname{sen}\theta\,\delta(\theta-\theta_0)}{\operatorname{sen}\theta}\int\delta(\varphi-\varphi_0)\,d\varphi$$

la coordenada radial EMPIEZA en $r=0$, entonces definimos

$$\int_0^\infty \delta(r)\,dr = \frac{1}{2}$$

CILÍNDRICAS



$$\vec{r}_0 = \rho_0 \hat{e}_\rho + z_0 \hat{k}$$

$$x = \rho \cos\varphi$$

$$y = \rho \operatorname{sen}\varphi$$

$$z = z$$

Deberes: ver que $d^3\vec{r} = \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$ y

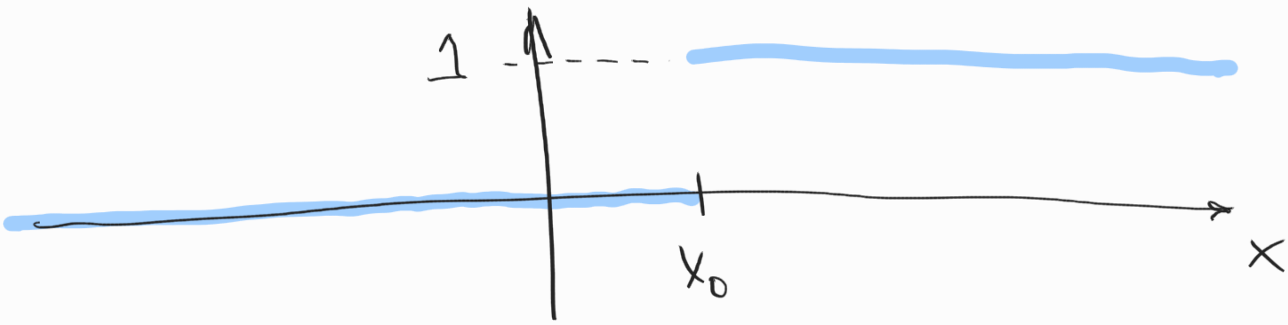
$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{\delta(\rho-\rho_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)\,\delta(z-z_0)}{\rho}$$

DISTRIBUCIONES (no son funciones!)

Ver NOTAS SOBRE DISTRIBUCIONES

• Escalón de Heavyside

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > x_0 \\ 0 & \text{para } x < x_0 \end{cases}$$



No es derivable en $x = x_0$!!

Pero podemos calcular integrales que involucren H'

Tomemos $f(x)$ una función suave de soporte compacto

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)H'(x-x_0)\,dx \underset{\text{Partes}}{=} \underbrace{f(x)H(x-x_0)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} f'(x)H(x-x_0)\,dx$$

$f(+\infty) = 0$

$f(-\infty) = 0$

$$= -\int_{x_0}^{\infty} f'(x)\,dx$$

$$= -\overbrace{f(\infty)}^{0} + f(x_0)$$

Fíjense que nos queda:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, H'(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

y habíamos definido la δ de DIRAC así:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

Entonces $\delta(x-x_0) = H'(x-x_0)$ PERO NO SON FUNCIONES!

DISTRIBUCIONES: "funciones generalizadas" que tienen sentido cuando se integran MULTIPLICADAS por funciones suficientemente SUAVES.

Son FUNCIONALES LINEALES que actúan sobre un espacio de "funciones de prueba"

$\alpha = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$, con f de soporte COMPACTO

Son funcionales $G[f] : \alpha \longrightarrow \mathbb{R}$ le asocian un número real a una función de α

→ El escalón de Heaviside es una distribución:

$$H[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,H(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} f(x)\,dx$$

→ la delta de Dirac también:

$$\delta[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$

En general, cualquier función de prueba $g(x)$ puede tener una distribución asociada:

$$g[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

DERIVADA DISTRIBUCIONAL

Para una función de prueba $g(x)$ se cumple que su derivada $g'(x)$ es también una función de prueba y

$$g'[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\,f(x)\,dx = \cancel{g(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f'(x)\,dx$$

0

$$= g[-f']$$

Se DEFINE la derivada de una distribución como:

$$G'[f] = -G[f']$$

Para la función escalón de Heavyside

$$H'[f] = -H[f'] = -\int_0^{\infty} f'(x)dx = f(0) = \delta[f]$$

Ejemplo: Con la delta misma:

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} -f'(x)\,\delta(x)\,dx = -f'(0)$$

En el práctico:

- Van a calcular derivadas distribucionales

- Van a usar δ y H para escribir densidades de carga eléctrica $\rho(\vec{r})$ (ó corriente $\vec{J}(\vec{r})$).