DESARROLLO MULTIPOLAR CARTESIANO DE LA RADIACIÓN

ANTES ¿Cuándo vale esta aproximación que hicimos para los campos de radiación?

1- En la deducción anterior de $\vec{E}_{rad}$ y $\vec{B}_{rad}$, descartamos términos de orden $\frac{1}{r^2}$, que venían de términos $\approx \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\vec{J}}{r^2}$ en derivados de $\vec{A}_{rad}$.

y nos quedamos con términos $\approx \frac{1}{c^2}\int d^3r' \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$

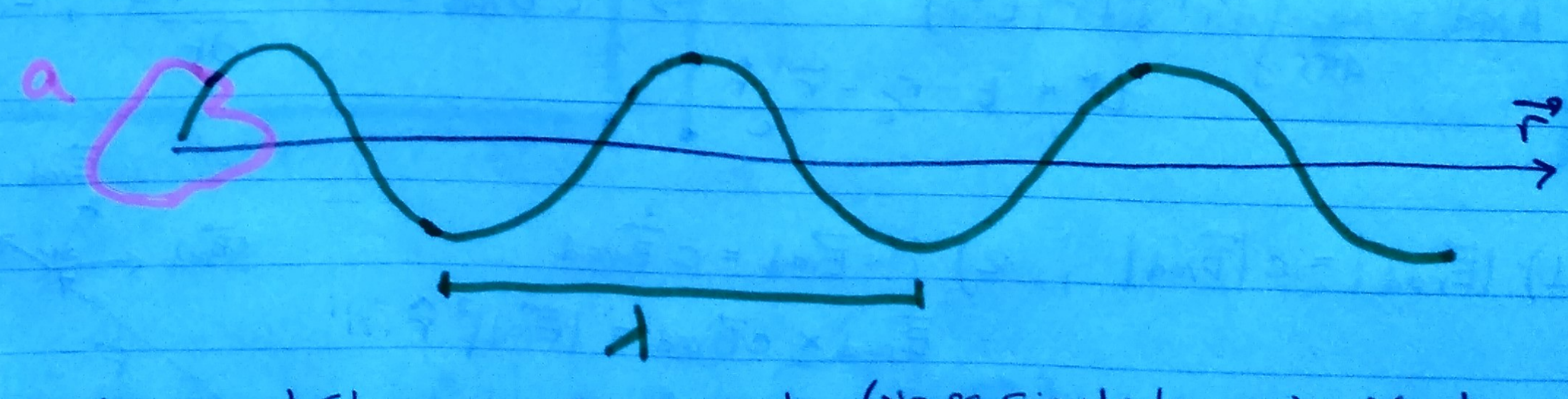
Si estimamos $|\partial \vec{J}/\partial t| \approx \frac{|\vec{J}|}{T}$ ↪ período de la variación temporal de la fuente

Tiramos $\frac{|\vec{J}|}{cr^2}$ y nos quedamos con $\frac{|\vec{J}|}{c^2 r T} \approx \frac{r}{cT}\frac{|\vec{J}|}{cr^2} \approx \frac{r}{\lambda}\frac{|\vec{J}|}{cr^2}$

Ahora $cT \sim \lambda$ la longitud de onda "emitida"

$\Rightarrow$ Necesitamos que $\frac{r}{\lambda} \gg 1$ para que nuestro desarrollo sea válido

Habíamos comparado con $\underline{a}$ el TAMAÑO de la fuente, pero debemos considerar la LONGITUD de ONDA también.



① Zona CERCANA o estática $a \sim r \ll \lambda$ (No se siente la variación de los campos)

② Zona INTERMEDIA $a \ll r \sim \lambda$??

③ ZONA de RADIACIÓN $a \ll \lambda \ll r$ → Acá va a valer lo que haremos ahora ...

$\vec{B}_{rad}$ y $\vec{E}_{rad}$ dependen de $\boxed{\frac{\partial \vec{A}_{rad}}{\partial t} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{\alpha}(\vec{r},t)}$, con

$$\boxed{\vec{\alpha}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3r' \, \vec{J}\Big(\vec{r}', \underbrace{t - r/c + \frac{\vec{r}'\cdot\hat{r}}{c}}_{t^*}\Big)}$$

Aproximamos $\vec{J}(\vec{r}', t^*)$ para $a \ll \lambda \ll r$,

TAYLOR , $\varepsilon \ll 1$

$$f(t_0+\varepsilon) = f(t)\Big|_{t_0} + \varepsilon \frac{df}{dt}\Big|_{t_0} + \dots$$

$$\vec{J}(\vec{r}', t^*) \simeq \vec{J}(\vec{r}', t - r/c) + \underbrace{\frac{\vec{r}'\cdot\hat{r}}{c} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}(\vec{r}', t - r/c)}_{} + \dots$$

donde $t_0 = t - r/c$ y la cosa "chica" es $\varepsilon = \frac{\vec{r}'\cdot\hat{r}}{c} \approx \frac{a}{c}$

Cuando J varía en un tiempo T, $\left|\frac{\partial J}{\partial t}\right| \sim \frac{J}{T}$ y el término $\sqcup$ va como

$\frac{a}{cT} = \frac{a}{\lambda} \ll 1$.

→ Vamos a ver que este desarrollo de $\vec{J}$ nos permitiré identificar que:

$$\vec{\alpha}(\vec{r},t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{p}(t - r/c) + \frac{1}{c}\frac{d^2}{dt^2}\vec{m}(t-r/c)\times\hat{r} + \frac{1}{c}\frac{d^3}{dt^3}\mathbb{Q}(t-r/c)\cdot\hat{r} + \dots$$

MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DE LA FUENTE "E1"

MOMENTO DIPOLAR MAGNÉTICO DE LA FUENTE "M1"

MOMENTO CUADRUPOLAR ELÉCTRICO DE LA FUENTE "E2"

$$\vec{\alpha}(\vec{r},t) \simeq \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int d^3r' \, \vec{J}(\vec{r}', t - r/c)}_{\vec{\alpha}_{E_1}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{d^3r'}{c}(\vec{r}'\cdot\hat{r})\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}(\vec{r}', t - r/c)}_{\vec{\alpha}_{E_2}\,,\ \vec{\alpha}_{M_1}} + \dots$$

Multipolo Eléctrico de orden 2^ℓ , $\ell=1$

Multipolo Eléctrico de orden 2^ℓ , $\ell=2$

Multipolo Magnético de orden 2^ℓ , $\ell=1$

PRIMER TÉRMINO: Radiación dipolar eléctrica (α_{E1})

USO QUE

$$\int d^3r' \, \vec{J} = -\int d^3r' \, \vec{r}' \, (\nabla' \cdot \vec{J})$$

Dem: Tengo

$\int d^3r' \, (J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z})$ Miremos la componente $\hat{x}$ del vector.

También $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$

Ahora $\nabla' \cdot (x'\vec{J}) = x' \nabla' \cdot \vec{J} + \underbrace{(\nabla' x')}_{\hat{x}} \cdot \vec{J} = x' \nabla' \cdot \vec{J} + J_x \rightarrow J_x = \nabla' \cdot (x'\vec{J}) - x' \nabla' \cdot \vec{J}$

$$\Rightarrow \int d^3r' \, J_x \hat{x} = \underbrace{\cancel{\int d^3r' \, \nabla' \cdot (x'\vec{J})}}_{\text{Teo div.}} - \int d^3r' \, x' \, \nabla' \cdot \vec{J}$$

y sumo en $\hat{y}$ y $\hat{z}$ para obtener la igualdad de arriba.

PURA DIVERGENCIA: $\int_S d\vec{S} \cdot x'\vec{J} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

Tb. tengo la ec. de continuidad: $\nabla' \cdot \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho(\vec{r}', t - r/c)}{\partial t}$ entonces:

$$\vec{\alpha}_{E1}(\vec{r}, t) = \frac{d}{dt} \int d^3r' \, \vec{r}' \, \frac{\partial \rho(\vec{r}', t - r/c)}{\partial t} = \frac{d^2}{dt^2} \underbrace{\int d^3r' \, \vec{r}' \, \rho(\vec{r}', t - r/c)}$$

Def de MOMENTO DIPOLAR $\vec{p}(t - r/c)$ de la fuente ρ

$$\vec{\alpha}_{E1}(\vec{r}, t) = \frac{d^2}{dt^2} \vec{p}(t - r/c) \equiv \ddot{\vec{p}}_{ret}$$

campos "dipolares eléctricos" $\vec{B}_{E1} = \dfrac{-\hat{r}}{c} \times \dfrac{\partial \vec{A}_{E1}}{\partial t} = \dfrac{-\hat{r}}{c} \times \dfrac{\mu_0}{4\pi r} \vec{\alpha}_{E1}(\vec{r}, t)$

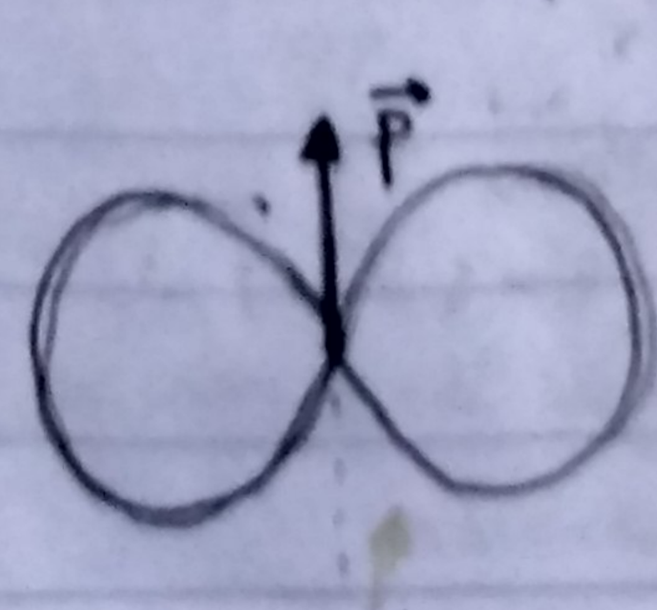
$$\Rightarrow \vec{B}_{E1} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}_{ret}}{r} \quad \text{y} \quad \vec{E}_{E1} = -\hat{r} \times c\vec{B}_{E1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\hat{r}(\hat{r} \cdot \ddot{\vec{p}}_{ret}) - \ddot{\vec{p}}_{ret}}{r} \right)$$

La dist. angular de la potencia del término de radiación dipolar eléctrica es

$$\left(\frac{dP_{ot}}{d\Omega} \right)_{E1} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} |\hat{r} \times \ddot{\vec{p}}_{ret}|^2$$

Si $\vec{p}(t) = p(t)\hat{k} \rightarrow \hat{r} \times \ddot{\vec{p}} = |\ddot{\vec{p}}| \sin\theta$

$$= \frac{\mu_0 |\ddot{\vec{p}}_{ret}|^2 \sin^2\theta}{16\pi^2 c}$$



Miren los GIFs en 3D para la POTENCIA! del dipolo.

SEGUNDO TÉRMINO: α_{M1} y α_{E2}

Tenemos: $\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int d^3r' \frac{1}{c}(\vec{r}'\cdot\hat{r})\overbrace{\frac{\partial J(\vec{r}', t-r/c)}{\partial t}}^{\dot{\vec{J}}}}$

Vamos a separar este integrando en una parte simétrica en $\vec{J}$ y $\vec{r}'$, y otra anti-simétrica.

Miren esto: $(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r} = -\hat{r}\times(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}}) = \hat{r}\times(\dot{\vec{J}}\times\vec{r}')$

Pero $\hat{r}\times(\dot{\vec{J}}\times\vec{r}') = \dot{\vec{J}}(\hat{r}\cdot\vec{r}') - \vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}})$
"bac-cab"

Entonces

$$(\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}} = (\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r} + \vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}})$$

$\downarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{(\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}}}{2} = \frac{(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r}}{2} + \frac{1}{2}\vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}})$$

$$\frac{(\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}}}{2} + \frac{1}{2}(\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}} = \frac{(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r}}{2} + \frac{1}{2}\left[\vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}}) + (\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}}\right]$$

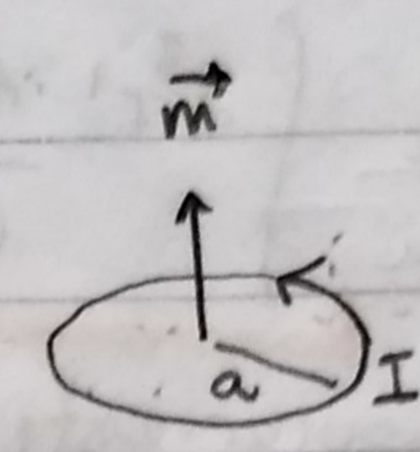
$$(\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left[(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r}\right]}_{\text{Antisimétrico en } \vec{J} \text{ y } \vec{r}'} + \underbrace{\frac{1}{2}\left[\vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}}) + (\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}}\right]}_{\text{Simétrico en } \vec{J} \text{ y } \vec{r}'}$$

Así que nuestra integral (segundo término del desarrollo) nos da un término ANTISIMÉTRICO y otro SIMÉTRICO:

$$\underbrace{\int d^3r' \frac{1}{c}\frac{1}{2}\left[(\vec{r}'\times\dot{\vec{J}})\times\hat{r}\right]}_{\text{"M1"}} + \underbrace{\int d^3r' \frac{1}{c}\frac{1}{2}\left[\vec{r}'(\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}}) + (\hat{r}\cdot\vec{r}')\dot{\vec{J}}\right]}_{\text{"E2"}}$$

Ahora hay que acordarse de la definición del momento dipolar magnético de una distribución de corrientes:

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}')$$



recuerden ej 6 del práctico 4.

$$\vec{m} = I \cdot (\pi a^2)$$

Entonces, el término ANTISIMÉTRICO nos da la RADIACIÓN DIPOLAR MAGNÉTICA:

$$\vec{\alpha}_{M1}(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\int d^3r' \frac{1}{c\,2}\left(\vec{r}' \times \vec{J}\right) \times \hat{r} = \frac{1}{c}\,\ddot{\vec{m}}(t - r/c) \times \hat{r}$$

$$\ddot{\vec{m}}_{ret} = \ddot{\vec{m}}(t - r/c) = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \vec{r}' \times \ddot{\vec{J}}(\vec{r}', t - r/c)$$

los campos de radiación generados por el término dipolar magnético son:

¡Hagan la cuenta!

$$\vec{B}_{M1}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\left(\frac{\hat{r}(\hat{r}\cdot\ddot{\vec{m}}_{ret}) - \ddot{\vec{m}}_{ret}}{r}\right)$$

y

$$\vec{E}_{M1}(\vec{r},t) = \frac{-\mu_0}{4\pi c}\left(\frac{\hat{r} \times \ddot{\vec{m}}_{ret}}{r}\right)$$

DIPOLAR MAGNÉTICO = "M1"

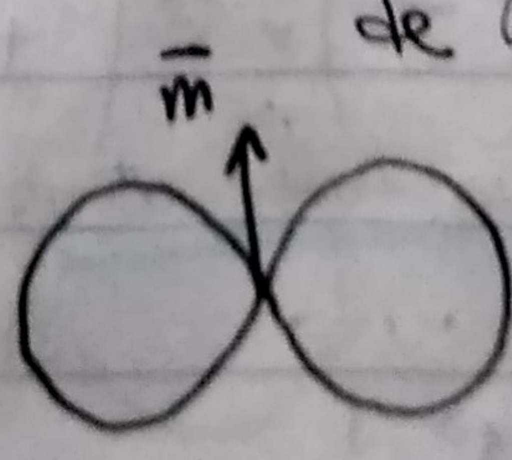
y la distribución angular de la potencia es:

$$\left(\frac{dPot}{d\Omega}\right)_{M1} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\hat{r} \times \ddot{\vec{m}}_{ret}\right|^2$$

Esto se SUMA a la potencia emitida por el término dipolar eléctrico de $\vec{\alpha}_{E1}$ (si hay)

Si $\vec{m}(t) = m(t)\,\hat{k} \Rightarrow$

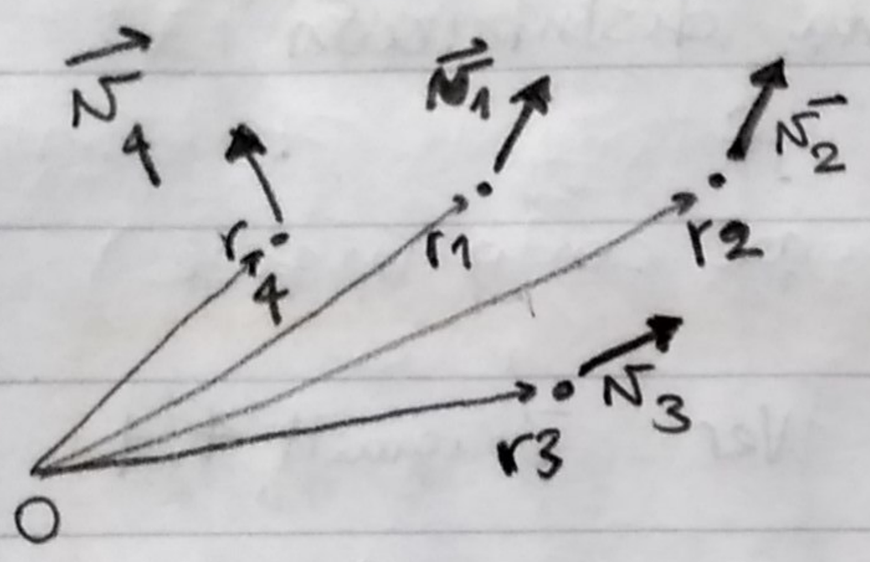
$$\left(\frac{dPot}{d\Omega}\right)_{M1} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c}\left|\ddot{m}_{ret}\right|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$



El término SIMÉTRICO de la integral nos va a dar la radiación cuadrupolar eléctrico $\alpha_{E2} \left(\equiv \frac{\partial \bar{A}_{E2}}{\partial t} \right)$

$$\vec{\alpha}_{E2}(\vec{r},t) = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt} \int d^3r' \left[(\vec{r}'\cdot\hat{r})\dot{\vec{J}} + (\hat{r}\cdot\dot{\vec{J}})\,\vec{r}' \right]$$

Para ver mejor este término, vamos a escribir la densidad de cargas y corrientes como una suma de contribuciones de cargas puntuales (y después volvemos al continuo).



$$\rho(\vec{r},t) = \sum_k q_k\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_k)$$

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \sum_k q_k \vec{v}_k\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_k) = \sum_k q_k \frac{d\vec{r}_k}{dt}\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_k)$$

Velocidades:

$$\vec{v}_k = \frac{d\vec{r}_k}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{r}_k \equiv \vec{r}' \quad , \quad \int d^3r' \longrightarrow \sum_k$$

$$\alpha_{E2}(\vec{r},t) = \frac{1}{2c} \frac{d^2}{dt^2} \sum_k q_k \Big[\underbrace{\vec{v}_k}_{= \frac{d\vec{r}_k}{dt}} (\vec{r}_k\cdot\hat{r}) + (\hat{r}\cdot \underbrace{\vec{v}_k}_{= \frac{d\vec{r}_k}{dt}})\, \vec{r}_k \Big]$$

entonces sale:

$$\sum_k q_k \left[\frac{d\vec{r}_k}{dt} (\vec{r}_k\cdot\hat{r}) + \left(\hat{r}\cdot \frac{d\vec{r}_k}{dt} \right) \vec{r}_k \right] = \sum_k q_k \frac{d}{dt} \left[\vec{r}_k (\vec{r}_k\cdot\hat{r}) \right]$$

Fíjense que $\hat{r}$ no depende de t (es la dirección del OBSERVADOR):

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_k (\vec{r}_k\cdot\hat{r}) \right) = \vec{v}_k (\vec{r}_k\cdot\hat{r}) + \vec{r}_k (\vec{v}_k\cdot\hat{r})$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}_{E2}(\vec{r},t) = \frac{1}{2c} \frac{d^3}{dt^3} \sum_k q_k \vec{r}_k (\vec{r}_k\cdot\hat{r})$$ y ahora volvemos al continuo

$$\vec{\alpha}_{E2}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \frac{d^3}{dt^3} \left\{ \left[\frac{1}{2} \int d^3r'\, \rho(\vec{r}', t-r/c)\, \vec{r}'\, \vec{r}' \right] \cdot \hat{r} \right\}$$

→ Esto es $\varphi(t-r/c)$ el momento cuadrupolar

¿Habían estudiado en ELECTROMAGNETISMO el momento cuadrupolar eléctrico?

→ Peguemos una repasada ...

El MOMENTO CUADRUPOLAR ELÉCTRICO de una distribución de cargas se define como

$$Q_{ij} = \frac{1}{2}\int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,') \, r'_i r'_j$$

Y el resultado para el potencial escalar (estático) de una distribución de cargas con momento cuadrupolar Q_{ij} era:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \underbrace{Q_{ij}\left(\frac{3r_ir_j - \delta_{ij}\, r^2}{r^5}\right)}$$

Ver, Zangwill 4.4

Griffiths ej 3.52

Vanderlinde 2.1.1

A veces se le dice momento cuadrupolar a esta cosa.

ESTO ES EL TENSOR CUADRUPOLAR DE TRAZA NULA.

OJO!

Otros libros DEFINEN al tensor momento cuadrupolar como

$$\Theta_{ij} = \frac{1}{2}\int d^3r' \, \rho(\vec{r}\,')\left(3r'_i r'_j - r'^2 \delta_{ij}\right)$$

y escriben el término cuadrupolar del potencial escalar (estático) como $\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \Theta_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5}$ → Esto es lo que hacen Griffiths y Vanderlinde.

Así que tenemos, en nuestro desarrollo multipolar el término E2

$$\frac{\partial \vec{A}_{E2}}{\partial t} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\, \vec{\alpha}_{E2}(\vec{r},t),$$

con

$$\vec{\alpha}_{E2}(\vec{r},t) = \frac{1}{c} \underbrace{\dddot{Q}_{ij}(t-r/c)}_{\dddot{Q}\text{ret}} \cdot \hat{r}_j$$

→ ESTO ES UN VECTOR, con filas $i = 1,2,3$.

$\frac{d^3}{dt^3} Q_{ij}(t-r/c)$ derivada tercera en el tiempo...

OJO Zangwill se EQUIVOCA y pone $\ddot{Q}$

Esto parece espantoso, lo vamos a practicar con los ejemplos y ejercicios...

Pero ANTES, les voy a escribir cómo quedan los campos de radiación cuadrupolar

CUADRUPOLAR ELÉCTRICO "E2"

$$\vec{B}_{E2}(\vec{r},t) = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\frac{\hat{r}\times\left(\dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r}\right)}{r}$$

$$\vec{E}_{E2}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{\left(\hat{r}\cdot\left(\dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r}\right)\right)\hat{r} - \dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r}}{r}$$

Acá recuerden que $\dddot{Q}_{ret}$ es un TENSOR (i filas, j columnas, $i,j = 1,2,3$ cartesiano).

$$\boxed{\dddot{Q}_{ret} = \frac{d^3}{dt^3}\left(\frac{1}{2}\int d^3r'\,\rho(\vec{r}', t - r/c)\, r'_i r'_j\right)}$$

y $\dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r}$ es un VECTOR.

$$\left(\dddot{Q}_{ret}\right)\left(\hat{r}\right) = \left(\ \right)$$

Obs:

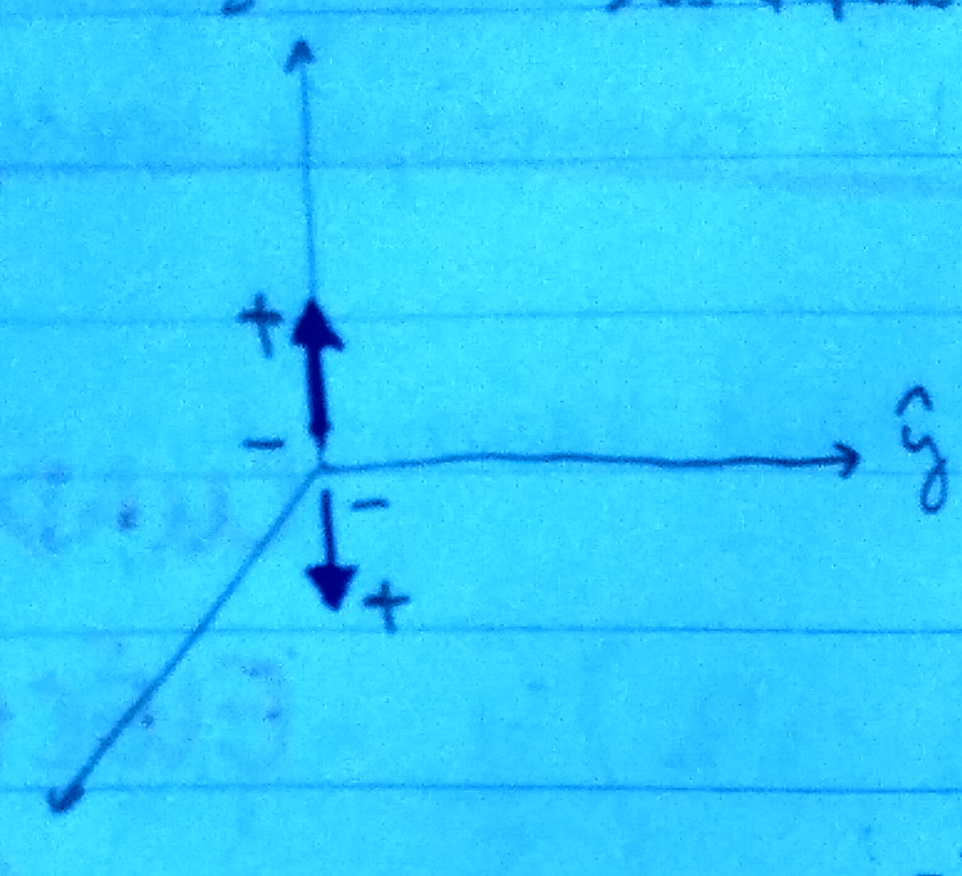
El momento cuadrupolar, que es simétrico en r', tiene 3 autovectores ortogonales. Si justo miro en una dirección $\hat{r}$ que es un autovector, en ese caso $\dddot{Q}_{ret}$ es proporcional a $\hat{r}$.

Ahora miremos la distribución angular de la Potencia:

$$\left(\frac{dP_{ot}}{d\Omega}\right)_{E2} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c^3}\left|\hat{r}\times\left(\dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r}\right)\right|^2$$

Como $\dddot{Q}_{ret}\cdot\hat{r} \propto \hat{r}$ cuando $\hat{r}$ es un AUTOVECTOR de Q_{ij}, vemos que la potencia es NULA en las 3 direcciones en las que $\dddot{Q}$ tiene sus autovectores.

Un ejemplo de cuadrupolo:



Dos dipolos eléctricos $\vec{p}(t)$ que tienen la misma variación temporal, pero apuntan en direcciones opuestas en el eje $\hat{z}$

Ver ej 8. del P7, es parecido.

$$\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$$

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2}\int d^3r' \rho(\vec{r}',t)\, r'_i r'_j = \frac{1}{2}\int d^3r' \rho(\vec{r}',t) \begin{bmatrix} x'^2 & x'y' & x'z' \\ x'y' & y'^2 & y'z' \\ x'z' & y'z' & z'^2 \end{bmatrix}$$

Si lo miran bien, como las cargas están todas en el eje $\hat{z}$, sólo se salvan los términos en la DIAGONAL, en particular el Q_{zz}

y tenemos 4 cargas:

$+q$ en $d\hat{z}$ y $-q$ en 0
$+q$ en $-d\hat{z}$ $-q$ en 0 → Acá habría que tomar un límite...

¿Cuáles son los autovectores de $\mathbb{Q}$? : $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, la propia base cartesiana, porque ya quedó diagonal:

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & Q_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{zz} \end{pmatrix}$$ con $Q_{xx} = Q_{yy} = 0$

⇒ En las direcciones $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, la potencia irradiada es NULA, y ahí va el dibujito que trae Zangwill

Próximo trojito...

¿Por qué no hay un término de radiación proporcional a $\ddot{q}$, la derivada segunda de la carga neta de la distribución?