Ejemplo (G 12.20)

En el sistema inercial S ocurren 2 eventos:

a)

Un evento A ocurre en el punto $(x_A=5, y_A=3, z_A=0)$ al tiempo t_A tal que $ct_A = 15$,

B ocurre en $(10, 8, 0)$ y $ct_B = 5$.

i) ¿Cuál es el intervalo invariante entre A y B?

ii) ¿Hay algún sistema inercial en el que A y B sean simultáneos?
Si es así, encuentre la velocidad $\vec{v}$ de ese referencial respecto a S.

iii) ¿Hay algún sistema inercial en el que A y B ocurran en el mismo LUGAR?
Si es así, encuentre la velocidad $\vec{v}$ de ese referencial respecto a S.

b) Repetir (a) con los eventos

$A = (2,0,0)$, $ct = 1$ y $B = (5,0,0)$, $ct = 3$.

¡USEMOS LO QUE APRENDIMOS!

$$x^\mu = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$X_A^\gamma = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_B^\gamma = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Intervalo invariante entre A y B:

$$\left(X_B^\alpha - X_A^\alpha\right) = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta x_{AB}^\alpha$$

$$\Delta s^2 = \Delta x_{AB}^\beta \, \Delta x_{AB\beta} = \Delta x_{AB}^\beta \, \underbrace{\Delta x_{AB}^\alpha \, \eta_{\alpha\beta}}$$

$$\Delta X_{AB\,\beta} = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = (+10, 5, 5, 0)$$

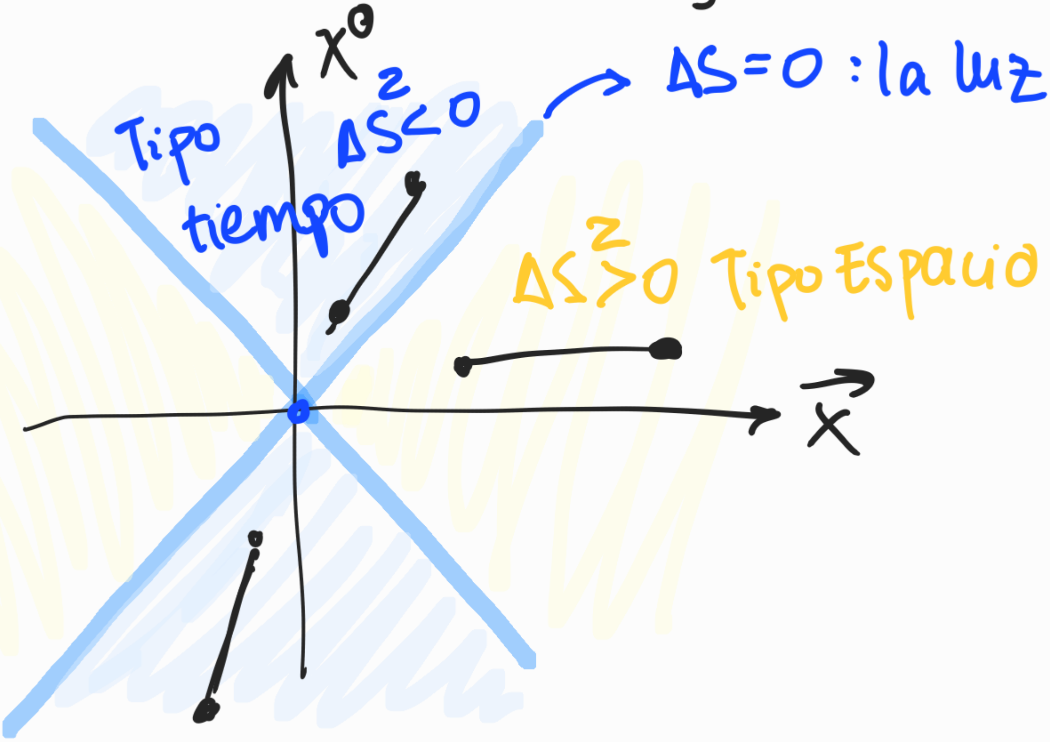
$$\Delta s^2 = \Delta x_{AB}^2 = \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} (+10, 5, 5, 0) =$$

$$= -100 + 25 + 25 + 0 = -50$$

ES UN INTERVALO TIPO TIEMPO

$\Rightarrow \exists$ un referencial en el que ocurren en el mismo LUGAR, pero nunca al mismo tiempo.

Recuerden en un diagrama de Minkowski:

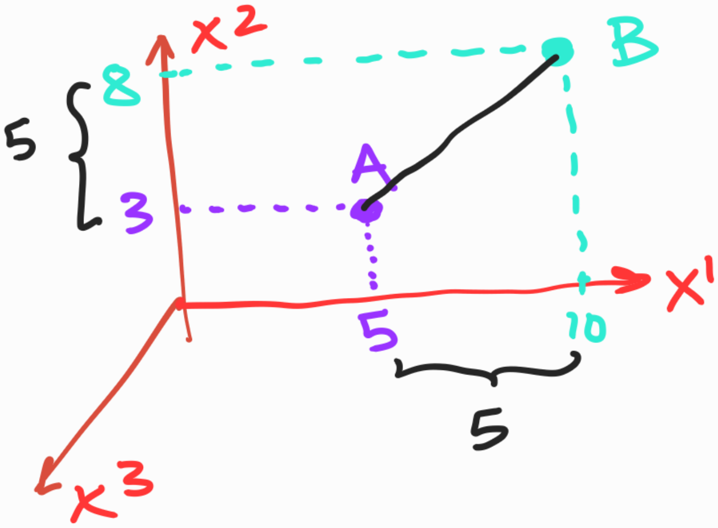


iii) Hal un referencial en el que ocurren en el mismo lugar.

¡Busquemos su velocidad $\vec{v}$ en S!

Llamémosle S':

Si A y B están en el mismo punto en S', éste debe moverse respecto a S en la dirección que une A con B



$$\vec{\Delta x}_{AB} = (5,5,0)$$

$$\vec{\Delta x}_{AB}' = (0,0,0)$$

MISMO PUNTO!

$\vec{\beta} = (\text{algo})\left(5\hat{x} + 5\hat{y}\right)$

o mejor $\vec{\beta} = K(1,1,0)$

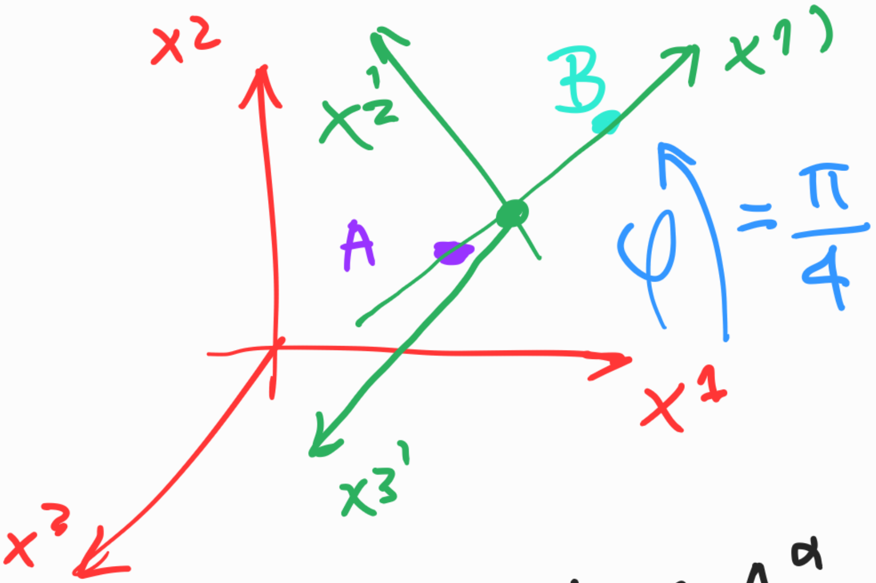
la transformación de lorentz entre S y S' se puede pensar como

UNA ROTACIÓN (para girar los ejes) y

UN BOOST (para cambiar la velocidad)

¡Es más fácil descomponerla así!

Pensemos la ROTACIÓN:



$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rotación}\ \Lambda^{\alpha}{}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Pensemos el BOOST: la dirección es el eje $x^{1'}$ ¿Cuál es la velocidad?

Boost

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Entonces PRIMERO ROTAMOS, DESPUÉS HACEMOS EL BOOST:

$$\underbrace{\Delta x'_{AB}}_{\text{En } S'} = \big(\text{Boost}\big)\big(\text{Rot}\big)\,\underbrace{\Delta x_{AB}}_{\text{En } S}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 5/\sqrt{2} + 5/\sqrt{2} \\ -5/\sqrt{2} + 5/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se escribe así

$$\boxed{\Delta x'^{\gamma}_{AB} = \underbrace{\Lambda^{\gamma}{}_{\mu}\, \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}}_{\text{Esto es un boost}}\, \Delta x^{\alpha}_{AB}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 10\gamma\left(-1-\beta/\sqrt{2}\right) \\ 10\gamma\left(\beta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\Delta x'_{AB}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Boost}} \begin{pmatrix} -10 \\ 10/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma 10 + \gamma\beta\frac{10}{\sqrt{2}} \\ +\gamma\beta 10 + \gamma\frac{10}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\Delta x'_{AB} = 10\gamma \begin{pmatrix} -1-\beta/\sqrt{2} \\ \beta+1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

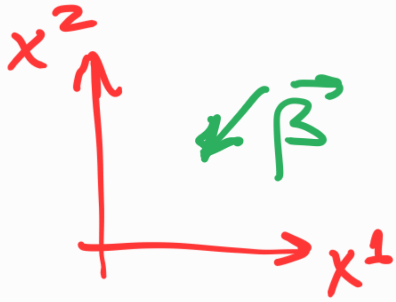
Hallemos β y γ

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A y B en el mismo PUNTO

$$\Rightarrow \quad \beta + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow \beta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}, \quad |\vec{v}| = c|\vec{\beta}| = \frac{c}{\sqrt{2}}$$



$$\boxed{\vec{v} = \frac{-c}{2}(1,1,0)}$$

Velocidad de S' visto en S

Escribamos al cuadrivector $\Delta x'_{AB}$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} = \sqrt{2}$$

$$\Delta x'_{AB} = 10\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1-1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} 10\sqrt{2}$$

$$\Delta x'_{AB} = \begin{pmatrix} -15\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-15\sqrt{2} \rightarrow ct' = x^{0'}$

En S' A y B ocurren en el mismo lugar

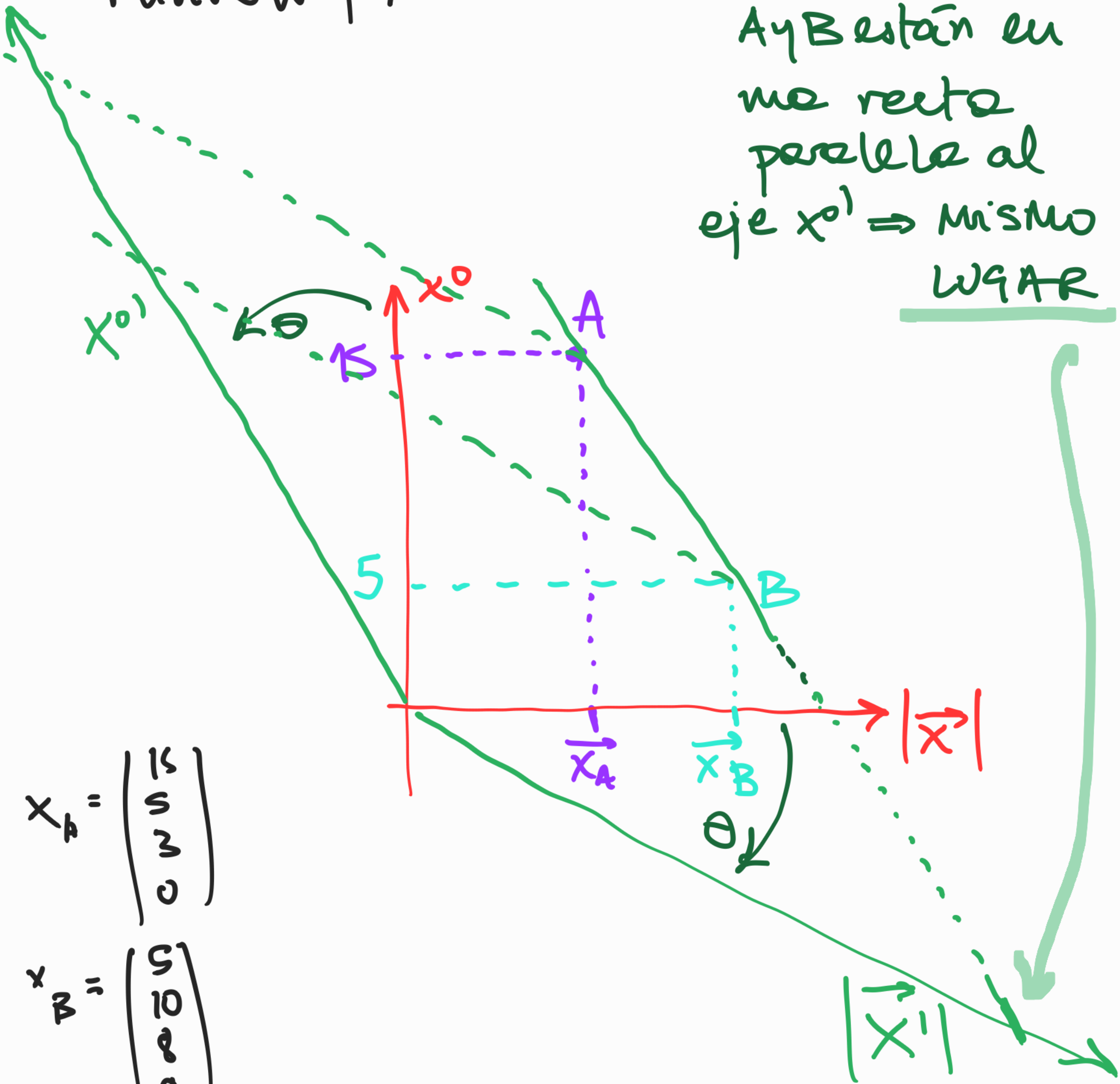
$$(x^{0'}_B - x^{0'}_A) = \frac{-15\sqrt{2}}{c}$$

$$t'_B - t'_A = \frac{-15\sqrt{2}}{c}$$

$$t'_B + \frac{15\sqrt{2}}{c} = t'_A$$

A OCURRE DESPUÉS QUE B

Pensemos en un diagrama de Minkowski



A y B están en una recta paralela al eje $x^{0'}$ $\Rightarrow$ MISMO LUGAR

$$x_A = \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tg}\theta = \beta < 0$

No lo hice a escala!

b) Repetir para los eventos

$A = (2, 0, 0)\ ct = 1$

$B = (5, 0, 0)\ ct = 3$

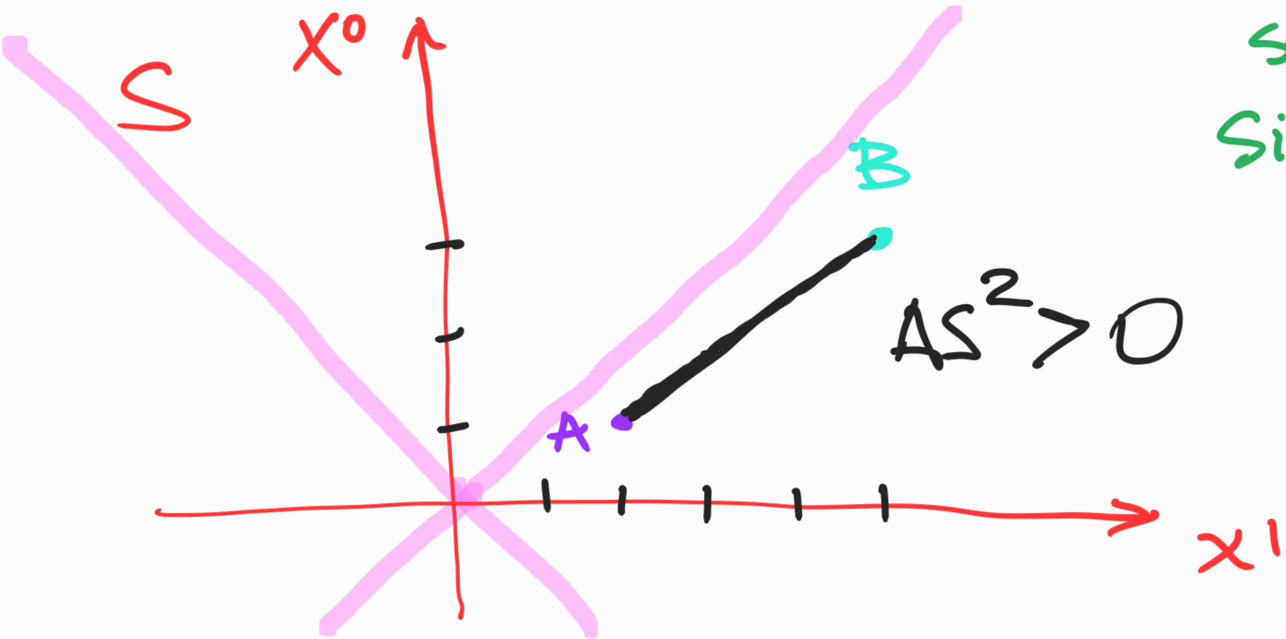
$$x_A^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ x_B^\mu = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \Delta x_{AB}^\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

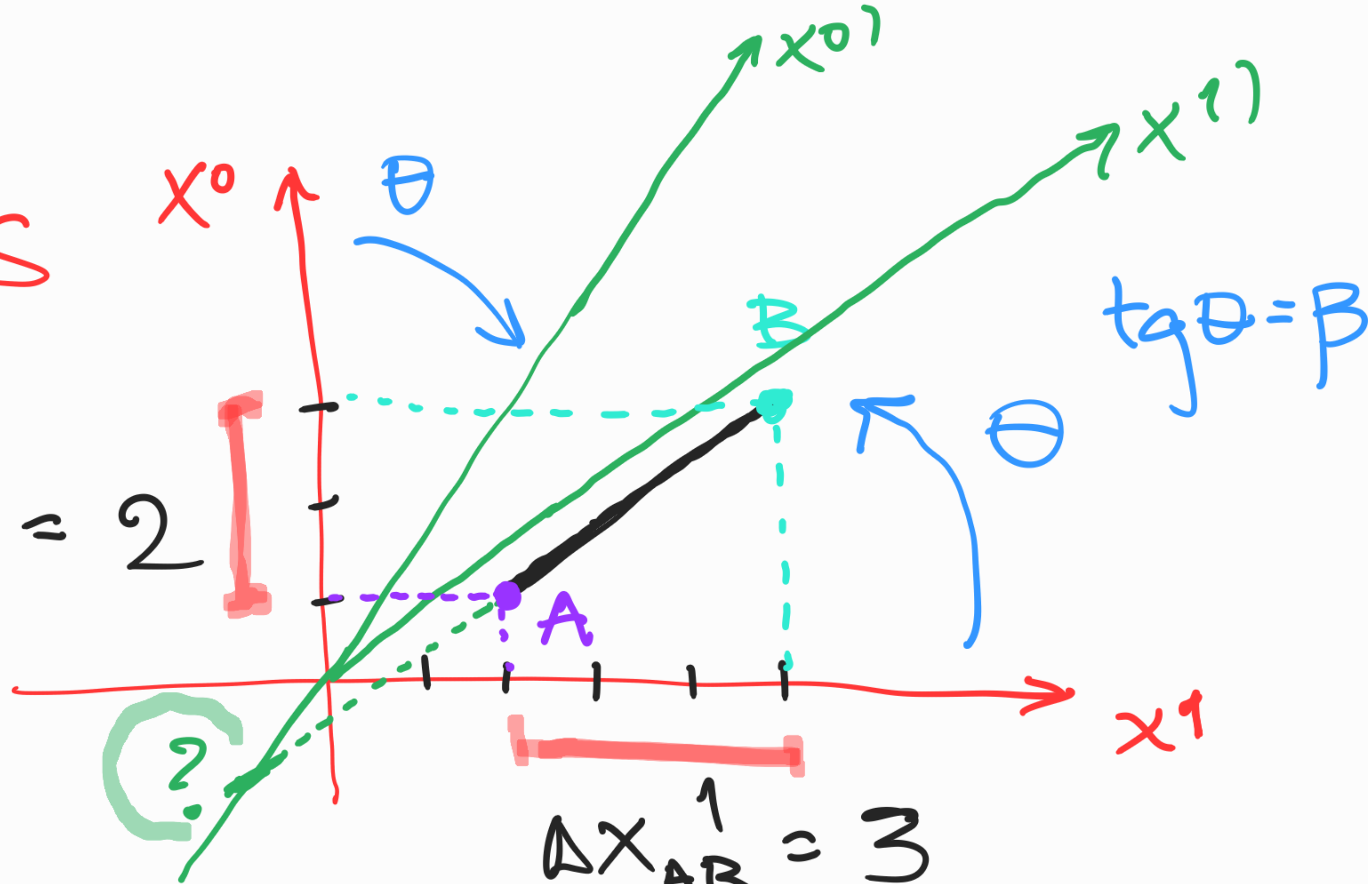
$$(\Delta x_{AB})^2 = -4 + 9 + 0 + 0 = 5 > 0$$

$\Rightarrow$ ES UN INTERVALO TIPO ESPACIO

Existe S' en el que son simultáneos

Podemos dibujar el diagrama de Minkowski:





$\Delta X^0_{AB} = 2$

$\Delta X^1_{AB} = 3$

En S' A y B simultáneos

$$\Delta X'^0_{AB} = 0 = \gamma\left(\Delta X^0_{AB} - \beta\,\Delta X^1_{AB}\right)$$

Transf. de Lorentz

HALLEMOS β y γ

No conozco

$$X'^0_A = X'^0_B$$

Para eso necesito un dato inicial

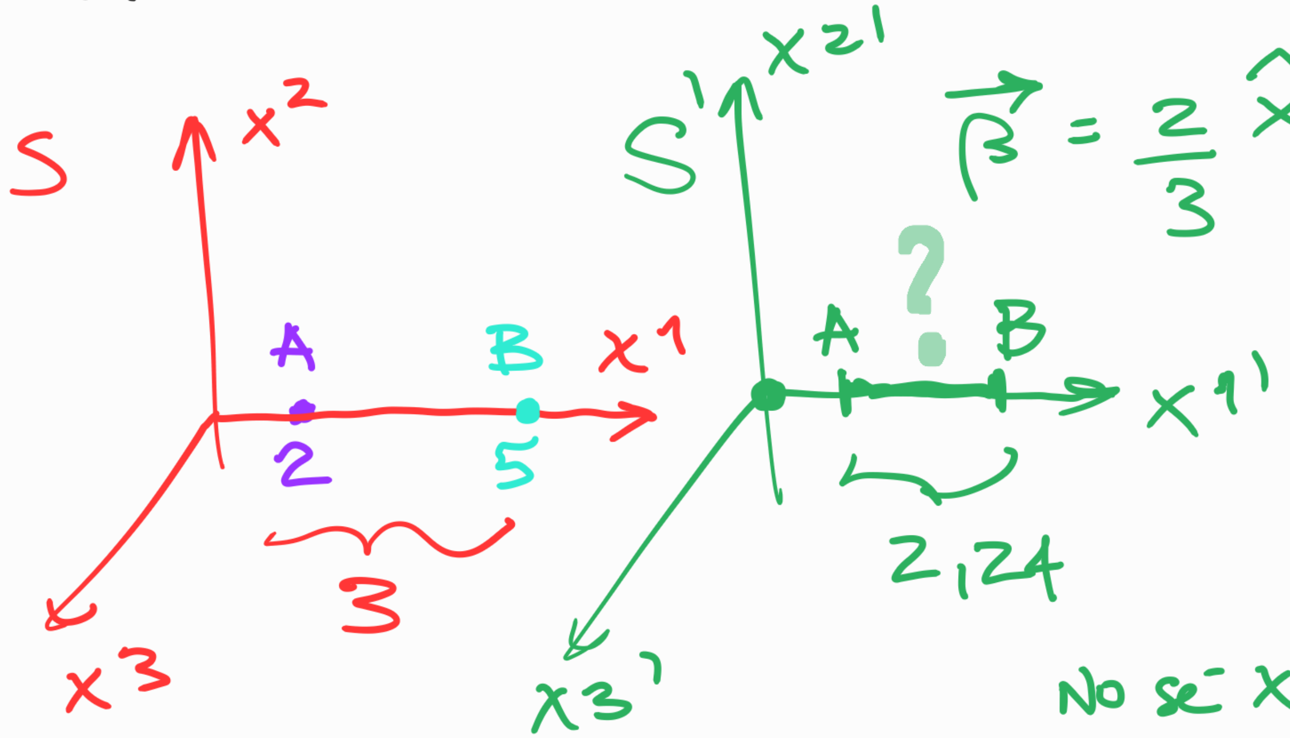
$$\gamma(2 - \beta 3) = 0$$

$$\Rightarrow \beta = 2/3$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(2/3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-4/9}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

¿En qué dirección es este BOOST?

En la dirección $x^1 \equiv x^{1'}$



$$\vec{\beta} = \frac{2}{3}\hat{x}$$

No sé $x_A^{1'}$ ni $x_B^{1'}$

$$\Delta x_{AB}^{1'} = \gamma\left(\Delta x_{AB}^{1} - \beta \Delta x_{AB}^{0}\right)$$

$$\Delta x_{AB}^{1'} = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(3 - \frac{2}{3}\cdot 2\right) = \sqrt{5}$$

$$3 - 4/3 = \frac{9-4}{3} = \frac{5}{3}$$

2,24

¡CONTRACCIÓN DE LORENTZ!

Para ubicar $x_A^{1'}$ y $x_B^{1'}$ en el eje $x^{1'}$ necesito un DATO INICIAL...