VI) Covariancia de las ecuaciones de Maxwell: formulación covariante del electromagnetismo.

COVARIANCIA: Una relación es COVARIANTE (frente a una transformación) cuando su FORMA es la MISMA en el referencial original y en el transformado.

COVARIANCIA DE LORENTZ: covariancia frente a transf. de Lorentz entre sistemas inerciales.

Un ejemplo PREVIO

- La 2ª ley de Newton es COVARIANTE frente a ROTACIONES y T. de GALILEO entre sist. inerciales

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

m invariante

Rotaciones, rotación R del sist. de ref.

$\vec{F}$ vector $\Rightarrow \vec{F}' = R(\vec{F})$

$\vec{x}$ vector $\Rightarrow \vec{x}' = R(\vec{x})$

$\frac{d^2}{dt^2}$ NO CAMBIA

$$\vec{F}' = R(\vec{F}) = R\left(m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}\right) = m\frac{d^2}{dt^2}R(\vec{x}) = m\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \vec{F}' = m\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2}$$

Galileo; $\vec{N}$ cte entre S' y S sistemas inerciales

$\vec{F}' = \vec{F}$ (si no, coriolis y $\vec{a}$ de transporte) $\quad \vec{F}' = \vec{F} = m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = m\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2}$

$\vec{x}' = \vec{x} - \vec{N}t$

$\frac{d^2\vec{x}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$, pero $\frac{d\vec{x}'}{dt} \neq \frac{d\vec{x}}{dt}$!

- La fuerza de Minkowski y el tiempo propio nos permiten tener una versión covariante Lorentz de la 2ª ley de Newton:

$$K^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} \qquad K'^\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha K^\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha \frac{dp^\alpha}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\Lambda^\mu{}_\alpha p^\alpha = \frac{dp'^\mu}{d\tau}$$

$$K'^\mu = \frac{dp'^\mu}{d\tau} \qquad \text{MISMA FORMA}$$

Covariancia de las leyes de Maxwell

Queremos escribir las leyes de Maxwell de una forma que no cambie al hacer transformaciones de Lorentz.

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla\cdot\vec{B} = 0 \qquad \text{y} \quad \vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Fuerza de Lorentz

- Sabemos cómo transforman $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (sus componentes) ante boosts.
- Necesitamos:
  - ver cómo transforman LOS OPERADORES: ∇, $\frac{\partial}{\partial t}$, $\Box^2$
  - ver cómo transforman LAS FUENTES ρ y $\vec{J}$.
  - ver cómo transforman LOS POTENCIALES ϕ y $\vec{A}$

- LOS OPERADORES: ∇: ∇f, $\nabla\cdot\vec{A}$, $\nabla\times\vec{A}$ y $\partial/\partial t$

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$$ es el operador correspondiente a $\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)$

ES COVARIANTE (índice ABAJO)

$$\text{y} \quad \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha = \partial^\beta = \frac{\partial}{\partial x_\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \end{pmatrix}$$ es CONTRAVARIANTE

El D'Alambertiano se escribe así

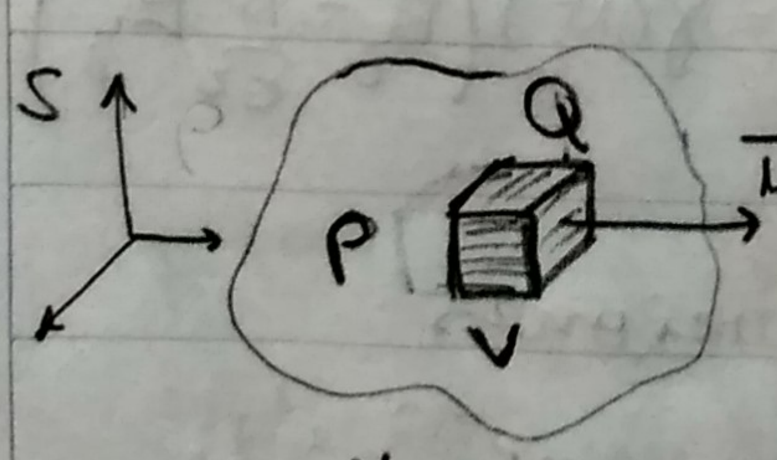
$$\Box^2 = \partial_\mu\partial^\mu = \partial^\mu\partial_\mu = \left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)$$

y ES INVARIANTE LORENTZ (No cambia, es un ESCALAR).

Ahora: $x^\alpha = \Lambda^{-1\,\alpha}{}_\beta\, x'^\beta$ y uso la regla de la cadena:

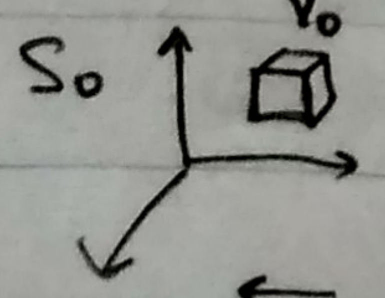
$$\frac{\partial}{\partial x'^\beta} = \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\beta}}_{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\beta}\frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\beta\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \text{o} \quad \partial'_\beta = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\beta\,\partial_\mu$$

- LAS FUENTES



$$\rho = \frac{Q}{V} \quad \text{y} \quad \vec{J} = \rho\vec{u}$$

$$V = \frac{V_0}{\gamma(\vec{u})}$$ la long. ∥ al boost se contrae



$\vec{u}_0 = 0$ Vamos al referencial PROPIO del volumencito de carga, donde está en reposo $\rho_0 = Q/V_0$

$\overleftarrow{-u}$ S_0 se mueve con $-\vec{u}$ respecto a S

Entonces $\rho = \rho_0 \gamma(\vec{u})$ y $\vec{J} = \rho_0 \gamma(\vec{u}) \vec{u}$

Podemos inventar esto: $J^\mu = \rho_0 u^\mu$, un cuadrivector densidad de corriente o "cuadricorriente"

ρ_0: invariante

J^μ: cuadrivector

u^μ: cuadrivector velocidad $u^\mu = \begin{pmatrix} \gamma(\vec{u}) c \\ \gamma(\vec{u}) \vec{u} \end{pmatrix}$

$$J^\mu = \begin{pmatrix} c \rho_0 \gamma(\vec{u}) \\ \rho_0 \gamma(\vec{u}) \vec{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\rho \\ \vec{J} \end{pmatrix}$$

ρ y $\vec{J}$ están relacionados por la ec. de continuidad, y eso mismo debe cumplir J^μ:

$$\nabla . \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad \nabla . \vec{J} = \partial_i J^i = \frac{\partial J^1}{\partial x^1} + \frac{\partial J^2}{\partial x^2} + \frac{\partial J^3}{\partial x^3}$$

$$\text{y} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (c\rho)}{\partial (ct)} = \frac{\partial J^0}{\partial x^0}$$

Entonces la ec. de continuidad se escribe como:

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = \partial_\mu J^\mu = 0$$

Esta es la cuatri-divergencia de J^μ

Se cumple en todos los ref. inerciales, porque es un ESCALAR de Lorentz.

- Los CAMPOS

Teníamos estas ecs. de transformación:

$$E_x' = E_x \ , \ E_y' = \gamma(v)(E_y - v B_z) \ , \ E_z' = \gamma(v)(E_z + v B_y)$$

$$B_x' = B_x \ , \ B_y' = \gamma(v)\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \ , \ B_z' = \gamma(v)\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right)$$

Tenemos 6 cantidades que transforman con unas relaciones MUY PARTICULARES: $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son parte de un cuadritensor antisimétrico: $F^{\mu\nu}$

24-4

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ 1 & -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ 2 & -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ 3 & -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{array}$$

Tensor de campo

μ filas

ν columnas

BOOST con $\vec{\beta} = v/c\ \hat{x}$, $\gamma(v)$

$$\Lambda = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ 1 & -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Transforma así:

$$F'^{\alpha\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\mu}\, \Lambda^{\beta}{}_{\nu}\, F^{\mu\nu}$$

UN EJEMPLITO:

- $$\underbrace{F'^{01}}_{E'_x/c} = \Lambda^0{}_\mu\, \Lambda^1{}_\nu\, F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_0\, \Lambda^1{}_\beta\, F^{0\beta} + \Lambda^0{}_1\, \Lambda^1{}_\beta\, F^{1\beta}$$

$$= \Lambda^0{}_0 \left(\cancel{\Lambda^1{}_0 F^{00}} + \underline{\Lambda^1{}_1 F^{01}} + \overset{=0}{\Lambda^1{}_2} F^{02} + \overset{=0}{\Lambda^1{}_3} F^{03} \right)$$

$$+ \Lambda^0{}_1 \left(\underline{\Lambda^1{}_0 F^{10}} + \cancel{\Lambda^1{}_1 F^{11}} + \overset{=0}{\Lambda^1{}_2} F^{12} + \overset{=0}{\Lambda^1{}_3} F^{13} \right)$$

$$F'^{01} = \Lambda^0{}_0\, \Lambda^1{}_1\, F^{01} + \Lambda^0{}_1\, \Lambda^1{}_0\, F^{10}$$

$$F'^{01} = \gamma^2 F^{01} + \gamma^2\beta^2 F^{10} = \gamma^2 \left(\frac{E_x}{c}\right) + \gamma^2\beta^2 \left(-\frac{E_x}{c}\right)$$

$$\frac{E'_x}{c} = \left(\gamma^2 - \gamma^2\beta^2\right) \frac{E_x}{c} = \underbrace{\left(\frac{1}{(1-\beta^2)} - \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} \right)}_{1} \frac{E_x}{c} = \frac{E_x}{c}$$

$\Rightarrow \quad E'_x = E_x$ ¡Ta claro!

$E_\parallel$ no cambiaba ...

- $$F'^{02} = \Lambda^0{}_\mu\, \Lambda^2{}_\nu\, F^{\mu\nu} = \Lambda^0{}_\mu\, \underbrace{\Lambda^2{}_2}_{=1}\, F^{\mu 2} = \Lambda^0{}_0\, \Lambda^2{}_2\, F^{02} + \Lambda^0{}_1\, \Lambda^2{}_2\, F^{12}$$

1 (es el único $\neq 0$ de la fila 2)

De la fila 0, sólo están $\mu = 0, 1$

$$F'^{02} = \gamma \left(\frac{E_y}{c}\right) - \gamma\beta\, B_z \Rightarrow$$

$$\frac{E'_y}{c} = \gamma\left(\frac{E_y}{c} - \beta B_z \right) = \frac{\gamma}{c}\left(E_y - v B_z\right) \Rightarrow E'_y = \gamma\left(E_y - v B_z\right)$$ ✓

Entonces tenemos el Tensor $F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta}$

de campos $F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (\ \vec{E}/c & &) \\ \left(-\vec{E}/c\right) & 0 & B_z & -B_y \\ & B_z & 0 & B_x \\ & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$

- Es antisimétrico en sus índices:

  $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$

- También se puede definir el Tensor dual: $G^{\mu\nu} = \frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma} F^{\delta\gamma}$

Acá $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de Levi-Civita completamente antisimétrico $\varepsilon^{0123} = 1$ y permutaciones pares, las permutaciones impares dan -1 (y todo el resto, 0).

$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$ y $\eta_{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: $G^{01} = \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon^{0123}}_{1} \left[\overset{1}{\eta_{22}} \overset{1}{\eta_{33}} F^{23} \right] + \frac{1}{2} \underbrace{\varepsilon^{0132}}_{-1} \left[\overset{1}{\eta_{33}} \overset{1}{\eta_{22}} F^{32} \right]$

$\underbrace{G^{01}}_{B_x} = \underbrace{F^{23}}_{B_x}$ ¡Funciona! y $F^{23} = -F^{32}$

Con estos amigos, vamos a escribir las ecs. de Maxwell de forma covariante.
1) CON FUENTES: $J^{\mu} \Rightarrow$ Gauss y Ampère
2) SIN FUENTES: Gauss magnético y Faraday

$$\boxed{1)\ \partial_{\nu} F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\mu} \qquad 2)\ \partial_{\nu} G^{\mu\nu} = 0}$$

¡OJO CON LOS ÍNDICES! Derivo al SEGUNDO

$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ en el vacío

24-6

1) Gauss y Ampère:

Tomo

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \rightarrow \mu = 0 \rightarrow \cancel{\partial_0 F^{00}} + \partial_1 F^{10} + \partial_2 F^{20} + \partial_3 F^{30} = \mu_0 J^0$$

$$\partial_i F^{i0} = \partial_i \left(\frac{E_i}{c}\right) = \frac{\nabla \cdot \vec{E}}{c} = \mu_0 c \rho$$

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

Primer fila $\left(\frac{\vec{E}}{c}\right)$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \underbrace{\mu_0 c^2}_{1/\varepsilon_0} \rho \quad ✓$$

GAUSS

→ Tomo $\mu = 1,2,3$

$\mu = 1$:

$$\partial_0 F^{10} + \cancel{\partial_1 F^{11}} + \partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} = \mu_0 J^1 = \mu_0 J_x$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(\frac{-E_x}{c}\right) + \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\partial (-B_y)}{\partial z} = \mu_0 J_x$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t} + \partial_y B_z - \partial_z B_y = \mu_0 J_x$$

$\mu = 2$

$$\partial_0 F^{20} + \partial_1 F^{21} + \cancel{\partial_2 F^{22}} + \partial_3 F^{23} = \mu_0 J^2 = \mu_0 J_y$$

$$\frac{\partial}{\partial(ct)}\left(\frac{-E_y}{c}\right) + \frac{\partial (-B_z)}{\partial x} + \frac{\partial (B_x)}{\partial z} = \mu_0 J_y$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t} - \partial_x B_z + \partial_z B_x = \mu_0 J_y$$

$\mu = 3$

...

Juntos los 3 y te queda $-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ ✓

Ampère

2) Gauss magnético y Faraday

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = 0$$

Tomo $\mu = 0 \Rightarrow \cancel{\partial_0 G^{00}} + \partial_1 G^{01} + \partial_2 G^{02} + \partial_3 G^{03} = 0$

$$\partial_i G^{0i} = \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad ✓$$

↳ fila 0: $\vec{B}$

Con $\mu = 1,2,3$ encuentren FARADAY de deberes!

• Fíjense que los leyes de Maxwell $\begin{cases} \partial_\alpha F^{\beta\alpha} = \mu_0 J^\beta \\ \partial_\delta G^{\alpha\delta} = 0 \end{cases}$

nos quedaron escritas de forma COVARIANTE LORENTZ

1) $\partial_\alpha F^{\beta\alpha}$ transforma como un 4-vector y J^β también $\Rightarrow$
Todo esto se escribe IGUAL con $F'^{\mu\nu}$ y J'^μ (Hay que probarlo!)

2) $\partial_\delta G^{\alpha\delta}$ también ...

Nos faltan los potenciales y la fuerza de Lorentz

• LOS POTENCIALES $\phi, \vec{A}$: adivinen qué ... $A^\mu = \begin{pmatrix} \phi/c \\ \vec{A} \end{pmatrix}$ es el cuadri-potencial

Ahora $\begin{cases} \vec{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \end{cases}$ ¿Cómo se escriben?

Es así:

$$\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$$

OJO se deriva con índice arriba $\partial^\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(-\dfrac{\partial}{\partial x^0}, \dfrac{\partial}{\partial x^i} \right)$

1) $\mu = 0$

$\nu = 1$ $F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 =$

$$\frac{E_x}{c} = -\frac{\partial A_x}{\partial (ct)} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi}{c}\right) = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_x}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)$$

$\nu = 2$ $$\frac{E_y}{c} = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_y}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)$$

$\nu = 3$ $$\frac{E_z}{c} = \frac{1}{c}\left(-\frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$\Big\}$ $\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\phi$ ✓

• Otro caso $F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 \Rightarrow B_z = \dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_z}{\partial y}$

$F^{13} = -B_y = \partial_x A_z - \partial_z A_x$

$F^{23} = B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y$

$\Big\}$ $\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ ✓

Ecuaciones de Maxwell (con los potenciales)

Las homogéneas (Faraday, Gauss magnético) salen muy fácil:

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\frac{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{2} F_{\alpha\beta} \right) = \partial_\nu \left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma} F^{\delta\gamma} \right)$$

va 1/2 (NO CAMBIA LA CUENTA!)

$$= \partial_\nu \left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \eta_{\alpha\delta} \eta_{\beta\gamma} \left(\partial^\delta A^\gamma - \partial^\gamma A^\delta \right) \right)$$

$$= \partial_\nu \left(\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \left(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha \right) \right)$$

$$= \underbrace{\partial_\nu \partial_\alpha}_{\text{SIMÉTRICO en } \nu \text{ y } \alpha} (\underbrace{\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}_{\text{ANTISIMÉTRICO en todos}} A_\beta) - \underbrace{\partial_\nu \partial_\beta (\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\alpha)}_{\text{acá ídem}} = 0$$

Importante: SIMÉTRICO x ANTISIMÉTRICO: Siempre que está un término en la suma, está el opuesto $\Rightarrow$ da CERO

Las inhomogéneas: $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) \overset{?}{=} \mu_0 J^\mu$

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu A^\mu$$

se pueden cambiar $\rightarrow \partial^\mu \left(\partial_\nu A^\nu \right) - \Box^2 A^\mu$ — D'Alambertiano

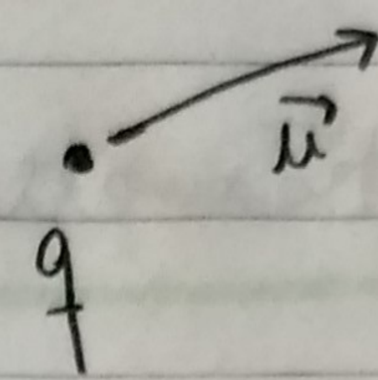
El primer término es la CONDICIÓN DE LORENTZ: $\partial_\nu A^\nu = \dfrac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} = \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{A} = 0$ GAUGE DE LORENZ

Si lo pongo $= 0 \Rightarrow$ El segundo me da $\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu$, que nos da las ecuaciones de ondas con las que venimos trabajando (ver CLASE 20)

$\Rightarrow$ $\boxed{\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu}$ es la manera más elegante de escribir las leyes de Maxwell

24-9

• La fuerza electromagnética sobre q



La fuerza de Minkowski sobre una carga q que se mueve con $\vec{u}$ es:

$$\boxed{K^{\mu} = q\, u_{\alpha} F^{\mu\alpha}} \quad , \text{ RECUERDEN } \; u_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} u^{\beta} = \left(-c\gamma(\vec{u}), \vec{u}\,\gamma(\vec{u})\right)$$

$\mu = 1$:

$$K^1 = q\, u_{\alpha} F^{1\alpha} = q\,\gamma(\vec{u})\left(-c F^{10} + \cancel{u_x F^{11}} + u_y F^{12} + u_z F^{13}\right)$$

$$K_x = q\,\gamma(\vec{u})\left(-c\left(-\frac{E_x}{c}\right) + u_y B_z - u_z B_y\right)$$

$$K_x = q\,\gamma(\vec{u})\left(E_x + u_y B_z - u_z B_y\right)$$

$$K_x = q\,\gamma(\vec{u})\left[\vec{E} + (\vec{u} \times \vec{B})\right]_x$$

Si escribimos $\mu = 2, 3 \Rightarrow \vec{K} = q\,\gamma(\vec{u})\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$

Y si se acuerdan $\vec{K} = \gamma(\vec{u})\vec{F} \Rightarrow$ recuperamos la fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}\right)$$

que ahora vemos que era el vector espacial (no relativista) nomás!

$$K^0 = q\, u_{\alpha} F^{0\alpha} = \frac{q}{c}\gamma(\vec{u})\vec{E}\cdot\vec{u} = \frac{\gamma(\vec{u})}{c}\frac{dEnergía}{dt} = \frac{1}{c}\frac{\partial Energía}{\partial\tau}$$

$q\,\vec{E}\cdot\vec{u}$ es la POTENCIA eléctrica $= \dfrac{dE_{eléctrica}}{dt}$ y $dt = \gamma(\vec{u})d\tau$

¡Ya tenemos todo! TRABAJEN el PRÁCTICO y las cosas que dejé para demostrar...