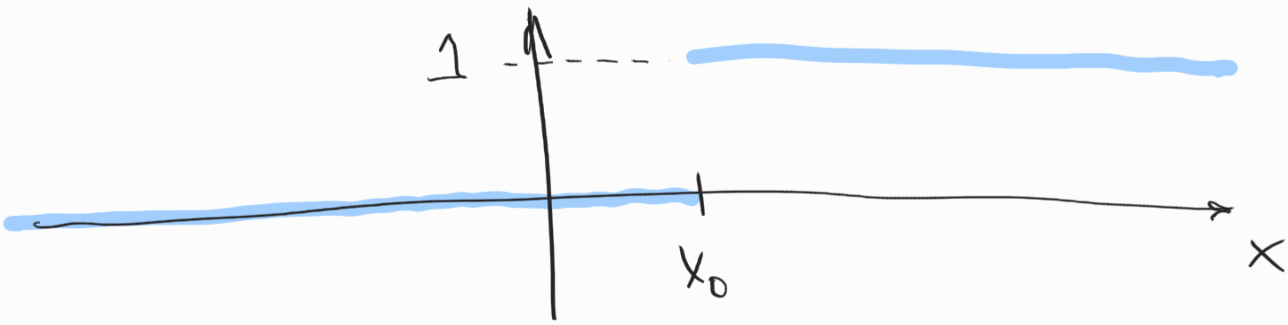
DISTRIBUCIONES (no son funciones!)

Ver NOTAS SOBRE DISTRIBUCIONES

• Escalón de Heavyside

$$H(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \text{para } x > x_0 \\ 0 & \text{para } x < x_0 \end{cases}$$

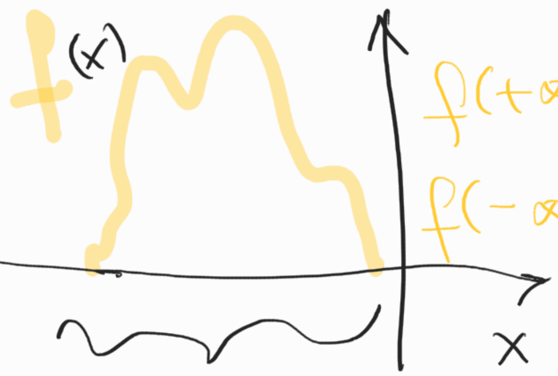


No es derivable en $x = x_0$!!

Pero podemos calcular integrales que involucren H'

Tomemos $f(x)$ una función suave de soporte compacto

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)H'(x-x_0)\,dx \underset{\text{Partes}}{=} \underbrace{f(x)H(x-x_0)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} - \int_{\mathbb{R}} f'(x)H(x-x_0)\,dx$$



$f(+\infty) = 0$

$f(-\infty) = 0$

$$= -\int_{x_0}^{\infty} f'(x)\,dx$$

$$= -\overbrace{f(\infty)}^{0} + f(x_0)$$

Fíjense que nos queda:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, H'(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

y habíamos definido la δ de DIRAC así:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

Entonces $\delta(x-x_0) = H'(x-x_0)$ PERO NO SON FUNCIONES!

DISTRIBUCIONES: "funciones generalizadas" que tienen sentido cuando se integran MULTIPLICADAS por funciones suficientemente SUAVES.

Son FUNCIONALES LINEALES que actúan sobre un espacio de "funciones de prueba"

$\mathcal{D} = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \}$, con f de soporte COMPACTO $\left(C_c^\infty(\mathbb{R})\right)$

Son funcionales $G[f] : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ le asocian un número real a una función de $\mathcal{D}$.

→ El escalón de Heavyside es una distribución:

$$H[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,H(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

→ la delta de Dirac también:

$$\delta[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x)\,dx = f(0)$$

En general, cualquier función de prueba $g(x)$ puede tener una distribución asociada:

$$g[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,g(x)\,dx$$

DERIVADA DISTRIBUCIONAL

Para una función de prueba $g(x)$ se cumple que su derivada $g'(x)$ es también una función de prueba y

$$g'[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} g'(x)\,f(x)\,dx = \cancelto{0}{g(x)f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,f'(x)\,dx$$

$$= g[-f']$$

Se DEFINE la derivada de una distribución como:

$$G'[f] = -G[f']$$

Para la función escalón de Heavyside

$$H'[f] = -H[f'] = -\int_0^{\infty} f'(x)\,dx = f(0) = \delta[f]$$

Ejemplo: Con la delta misma:

$$\delta'[f] = -\delta[f'] = \int_{-\infty}^{+\infty} -f'(x)\,\delta(x)\,dx = -f'(0)$$

Proposición: la derivada distribucional cumple la regla de la derivada del producto.

Def: producto función x distribución

Sean G distribución, f función $\in C^{\infty}$, $\varphi \in C_c^{\infty}$ (de prueba)

$$Gf[\varphi] = G[f\varphi]$$

Teorema: $(Gf)' = G'f + f'G$

Dem: ver que $\forall \varphi \in C_c^{\infty}$ $\underbrace{(Gf)'[\varphi]}_{a} = (\underbrace{G'f}_{b} + \underbrace{f'G}_{c})[\varphi]$

a - Por def de derivada de distribución $(Gf)'[\varphi] = -Gf[\varphi'] \underset{\text{def producto}}{=} -G[f\varphi']$

b- $G'f[\varphi] \underset{\text{def producto}}{=} G'[f\varphi] \underset{\text{def. derivada}}{=} -G[(f\varphi)'] =$ derivada de funciones

$= -G[f'\varphi + f\varphi']$

c- $f'G[\varphi] \underset{\text{def producto}}{=} G[f'\varphi]$

$$\Rightarrow \text{"}b+c\text{"} = -G[\cancel{f'\varphi} + f\varphi'] + G[\cancel{f'\varphi}]$$

$$= -G[f\varphi'] = a \qquad \square$$

Moraleja:

El producto de una distribución por una función se deriva usando la regla de la derivada del producto usual.

Ejemplo: Ej 5 del práctico 1