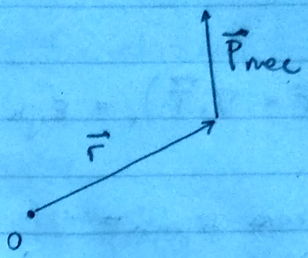
Conservación del momento angular. (Estoy usando Zangwill 15.6)

¿Se acuerdan del momento angular mecánico?



$$\vec L_{O\,mec} = \vec r \times \vec P_{mec}$$

$$\frac{d\vec L_{O\,mec}}{dt} = \underbrace{\cancel{\frac{d\vec r}{dt} \times \vec P_{mec}}}_{0} + \vec r \times \overbrace{\frac{d\vec P_{mec}}{dt}}^{\vec F_{mec}}$$

$$\frac{d\vec L_{O\,mec}}{dt} = \vec r \times \vec F_{mec} = \vec N_{O\,mec}$$ Torque respecto al punto O.

Vamos a tomar el origen del sist. de coord. como referencia

$$\frac{d\vec P_{mec}}{dt} = \int_V \vec f_{mec}\, d^3r = \int_V d^3r\,(\rho \vec E + \vec J \times \vec B)$$

$$\vec r \times \frac{d\vec P_{mec}}{dt} = \int_V \vec r \times \vec f_{mec}\, d^3r$$

y tenemos:

$$-\frac{\partial \vec g}{\partial t} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = \vec f_{mec}$$

$$\vec P_{em} = \vec g = \frac{\vec S}{c^2}$$ momento electromagnético

• Ahora tomemos un "momento angular electromagnético": $\vec r \times \vec g$

Si el punto $\vec r$ es indep. del tiempo, tomamos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec r \times \vec g) = \vec r \times \frac{\partial \vec g}{\partial t} = \vec r \times \left(-\vec f_{mec} + \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec r \times \vec g) - \underbrace{\vec r \times (\nabla \cdot \overleftrightarrow{T})} = -\vec r \times \vec f_{mec}$$

↪ tengo mi derivada temporal

QUIERO UNA DIVERGENCIA de un OBJETO : $\left(\frac{\partial \circledcirc}{\partial t} \pm \nabla \cdot \boxed{\square}\right) = \text{algo}$

¿Qué es esto? $\boxed{\vec r \times \nabla \cdot \overleftrightarrow{T}}$: un vector, esto es un producto vectorial

Escribamos en componentes : $(\vec a \times \vec b)_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$ ← $j = 1,2,3$, $k = 1,2,3$

$$(\vec a \times \vec b)_x = \varepsilon_{xyz}\, a_y b_z + \varepsilon_{xzy}\, a_z b_y$$

$$= (1)\, a_y b_z + (-1)\, a_z b_y$$ ✓

Tensor completamente antisimétrico de Levy-Civita

Entonces $\overbrace{\left(\bar{r} \times \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_i}$ $= \varepsilon_{ijk}\, r_j \underbrace{(\nabla\cdot\overleftrightarrow{T})_k}_{\frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk}}$

Ya lo habíamos escrito la clase pasada!

$$\left(\bar{r} \times \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\, r_j \frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk}$$

x=r, el vector posición, se deriva respecto de las

Ahora fíjense

$$\frac{\partial}{\partial x_m}(T_{mk}\, r_j) = \frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk}\, r_j + T_{mk} \frac{\partial r_j}{\partial x_m} = r_j \frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk} + \delta_{jm} T_{mk}$$

Esto sólo es 1 cuando $m=j$ es δ_{jm}

$$\bar{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j} + r_z \hat{k}$$

Entonces podés poner

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^m}(T_{mk}\, r_j) = \varepsilon_{ijk}\, r_j \left(\frac{\partial}{\partial x_m} T_{mk}\right) - \varepsilon_{ijk}\, \delta_{jm} T_{mk}$$

$$= \varepsilon_{ijk}\, r_j \frac{\partial}{\partial x^m} T_{mk} - \varepsilon_{ijk} T_{jk} = \varepsilon_{ijk}\left[r_j \frac{\partial T_{mk}}{\partial x^m} + T_{jk}\right]$$

Es -

Pero $T_{ij} = T_{ji} \Rightarrow \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{1} T_{jk} = \underbrace{\varepsilon_{jik}}_{-1} T_{kj} \Rightarrow$ se anula, $\varepsilon_{ijk} T_{jk} = 0$

Entonces

$$\varepsilon_{ijk} \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}(T_{mk}\, r_j) = \varepsilon_{ijk}\, r_j \frac{\partial}{\partial x^m} T_{mk} = \left(\bar{r} \times \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_i$$

$$\frac{\partial}{\partial x^m}(\varepsilon_{ijk} T_{mk} r_j) = \left(\bar{r} \times \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_i$$

Si quiero cambiar el signo, cambio los índices del Levi-Civita

$$-\left(\bar{r} \times \nabla\cdot\overleftrightarrow{T}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x_m}(\varepsilon_{ikj} T_{mk} r_j) = \left(\nabla\cdot(\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})\right)_i$$

¡Apareció mi divergencia!

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial(\bar{r} \times \vec{q})}{\partial t} + \nabla\cdot\underbrace{(\overleftrightarrow{T} \times \vec{r})} = -\vec{r} \times f_{mec}}$$

Ahí definimos $\overleftrightarrow{T} \times \vec{r} = \overleftrightarrow{M}$ densidad de flujo de momento angular

$$\boxed{M_{ij} = T_{ik}\, r_m\, \varepsilon_{jkm}}$$

$$[\overleftrightarrow{M}] = \frac{\text{momento angular} \times \text{velocidad}}{\text{volumen}} = \frac{\text{momento angular}}{\text{área . tiempo}}$$

¿Cuál es la ley de conservación?

Si defino: $\vec{l}_{em} = \vec{r} \times \vec{g} \equiv \vec{r} \times \vec{p}_{em}$ densidad de momento angular electromagnético

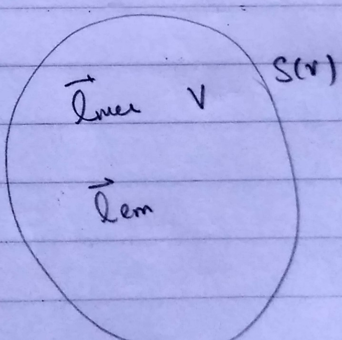
y $\int_V \vec{l}_{em}\, d^3r = \vec{L}_{em}$ momento angular electromagnético

$$\frac{\partial(\vec{l}_{em})}{\partial t} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{M} = -\vec{r} \times \vec{f}_{mec}$$

HAGAN EJ. 5 del Pr 5.

y tenemos $\vec{r} \times \vec{f}_{mec} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{r} \times \vec{p}_{mec}) = \frac{\partial(\vec{l}_{mec})}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial(\vec{l}_{mec} + \vec{l}_{em})}{\partial t} + \nabla\cdot\overleftrightarrow{M} = 0}$$



integro en V

$$\int_V \frac{\partial(\vec{l}_{mec} + \vec{l}_{em})}{\partial t}\, d^3r + \int_V \nabla\cdot\overleftrightarrow{M}\, d^3r = 0$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{tot} = \frac{d}{dt}(\vec{L}_{mec} + \vec{L}_{em}) = -\int_{S(V)} \overleftrightarrow{M}\cdot\hat{n}\, ds$$

Este es el momento angular que tienen las cargas en movimiento

Este es el momento angular acumulado en los campos

OTRA LEY DE "AMA DE CASA"