Interpretación FÍSICA del tensor de tensiones de Maxwell

Fíjense que tenemos nuestra ley de conservación:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{P}_{tot}}{\partial t} - \nabla \cdot \overleftrightarrow{T} = 0}$$

Continuidad

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad \text{y } \vec{J} = \rho \vec{v}}$$

$(-\overleftrightarrow{T})$ juega el rol de $\vec{J}$, la densidad de corriente eléctrica

$\vec{P}_{tot}$, la densidad de momento lineal total, juega el rol de la densidad de carga eléctrica

¿Qué unidades tiene $\overleftrightarrow{T}$?

$$[\vec{F}] = \left[\int_{S(V)} \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{n}\, ds\right]$$

$$\text{fuerza} = \frac{\text{momento}}{\text{tiempo}} = [\overleftrightarrow{T}] \cdot \text{área}$$

$$\Rightarrow [\overleftrightarrow{T}] = \frac{\text{momento}}{\text{área} \cdot \text{tiempo}}$$

¡Es un flujo de momento!

Densidad de flujo de momento (integrado te da el flujo...)

- El tensor de tensiones es una densidad de flujo de momento

Pero también podemos pensar:

$$\frac{\text{momento}}{\text{volumen}} \cdot \text{velocidad} = \frac{\text{momento}}{\text{área} \cdot \text{tiempo}}$$

$$\text{velocidad} = \frac{\text{distancia}}{\text{tiempo}}$$

$$\text{volumen} = \text{área} \cdot \text{distancia}$$

- Así que también podemos ver a $\overleftrightarrow{T}$ como una densidad de corriente de momento.

- También puede ser $\frac{\text{fuerza}}{\text{área}} = [\overleftrightarrow{T}]$, esto es una TENSIÓN, o PRESIÓN

¿Cuándo es cada cosa? Aquí vamos.

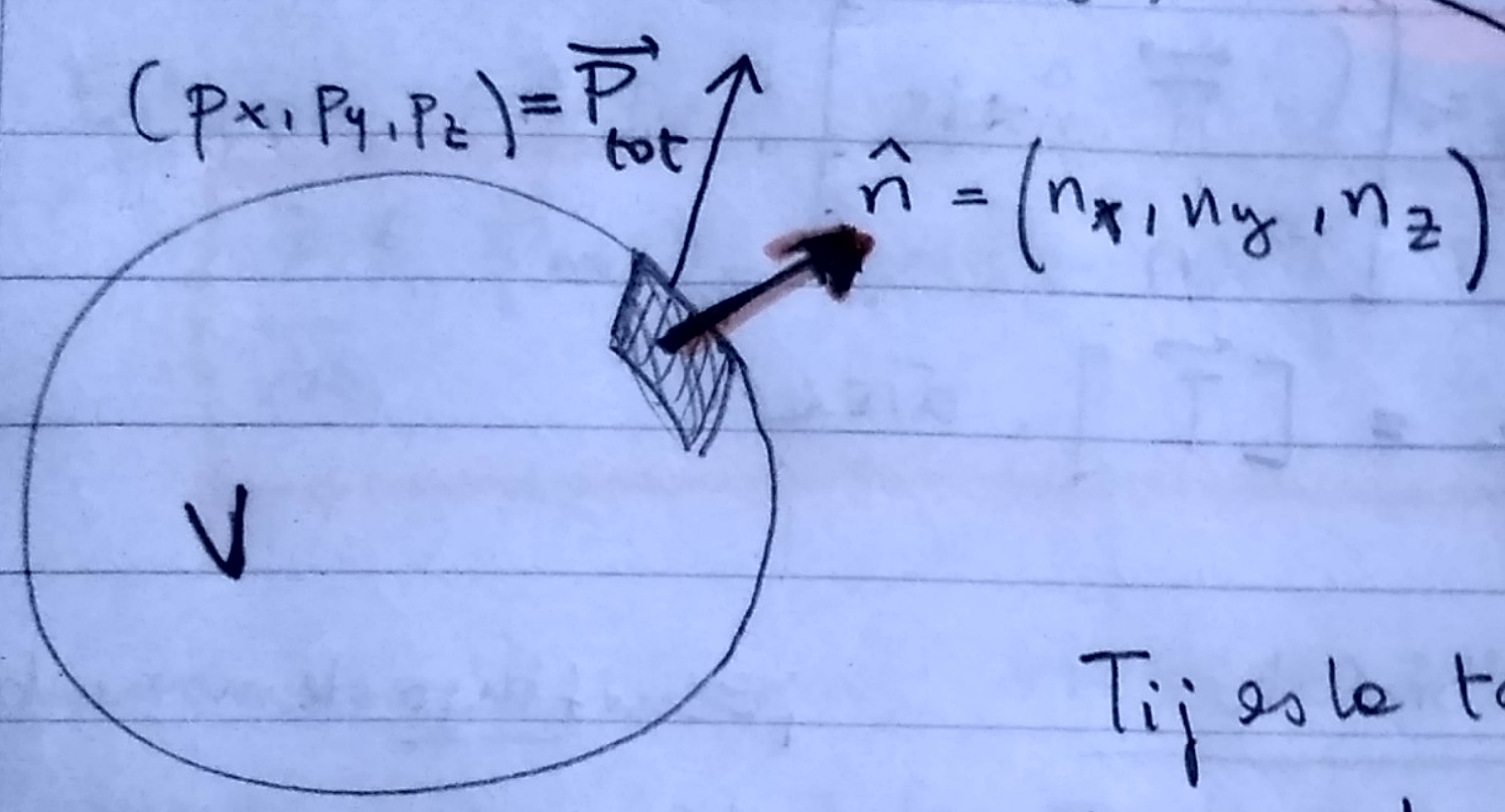
Hay un tema con: FLUX, FLOW, CURRENT

- $\overleftrightarrow{T}$ visto como una densidad de (flujo / corriente) de momento (o densidad de corriente de cantidad de movimiento).

T_{ij} tiene 2 índices: UNO dice la dirección en la que fluye el momento
EL OTRO dice qué componente del momento es lo que fluye.

Por ejemplo:

$$\frac{d(\vec{P}_{tot})_j}{dt} = \int_{S(V)} \overleftrightarrow{T}_{ij}\, \hat{n}_i \, ds$$



i = dirección en la que sale (o entra) a V a través de S.

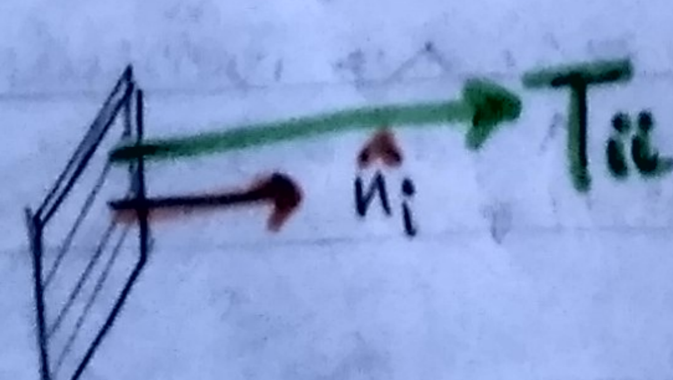
j = cuál componente del momento $\vec{P}_{total}$ sale (o entra) a V.

T_{ij} es la tasa a la cual la componente j del momento fluye a través del elemento de superficie $ds\,\hat{n}_i$.

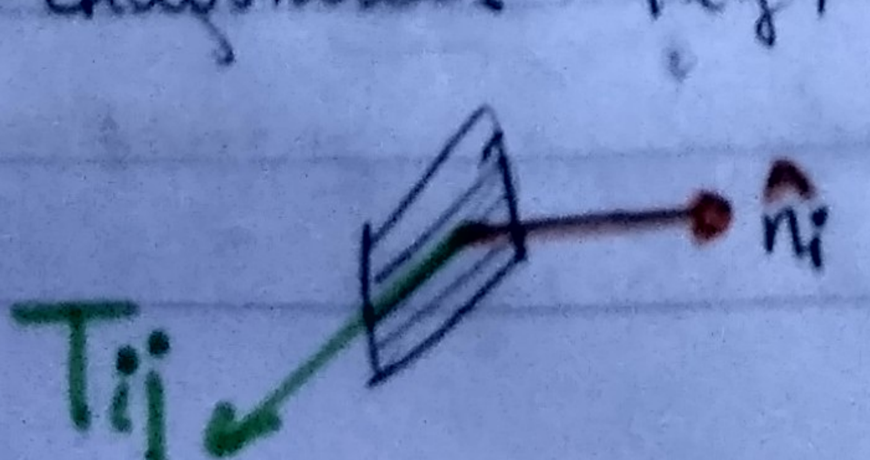
Como T_{ij} es SIMÉTRICO en i,j también T_{ij} es la tasa a la que la componente i del momento fluye a través del elemento de superficie $ds\,\hat{n}_j$.

- $\overleftrightarrow{T}$ visto como una tensión o presión:

  - Los elementos diagonales T_{xx}, T_{yy}, T_{zz} te dan PRESIONES: estoy calculando la componente de $\frac{d\vec{p}}{dt}$ perpendicular a la superficie: fuerza



  - Los no-diagonales T_{xy}, T_{xz}, T_{yz}, te dan las tensiones "de corte" o cizalla.



COMENTARIO MATEMÁTICO...

T_{ij} es un TENSOR de rango 2 (ver Zangwill 1.8) Ver Manual 2.

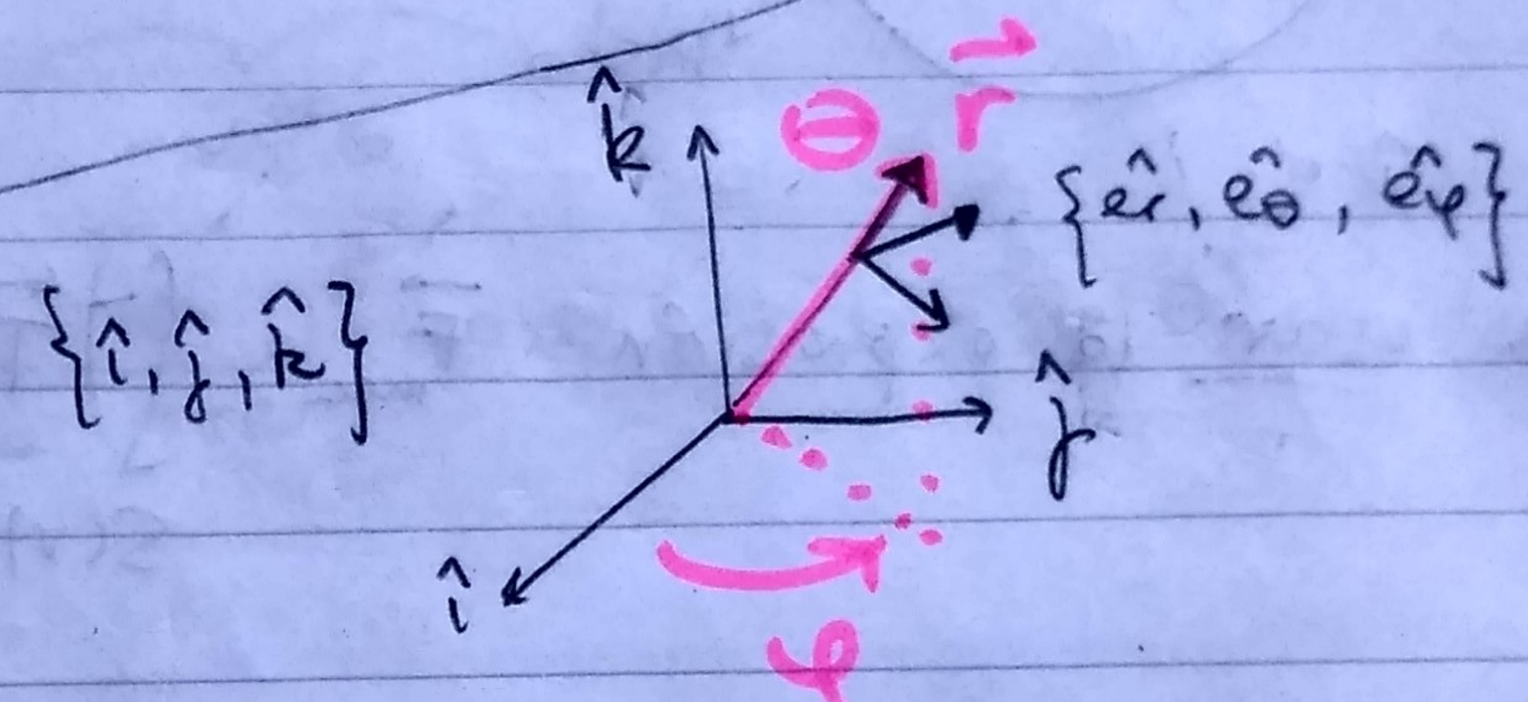
- Un tensor de rango 1 es un VECTOR (viejo amigo). Se define como un objeto que transforma por ROTACIONES (R_{ij}) así:

TRANSFORMADO

$$v'_i = R_{ij}\, v_j$$

Por ejemplo, esto nos permite transformar $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ en $\vec{r} = r\,\hat{e}_r(\theta,\varphi)$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$



- ¿Qué le pasa a T_{ij} con las rotaciones? Transforma así; con 2 matrices de rotación.

$$T'_{ij} = R_{ik}\, R_{jm}\, T_{km}$$

o mejor, piensen en el producto de matrices.

$$T'_{ij} = \begin{pmatrix} R_{ik} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{km} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{mj} \end{pmatrix}$$

matriz de rotación R_{ik}

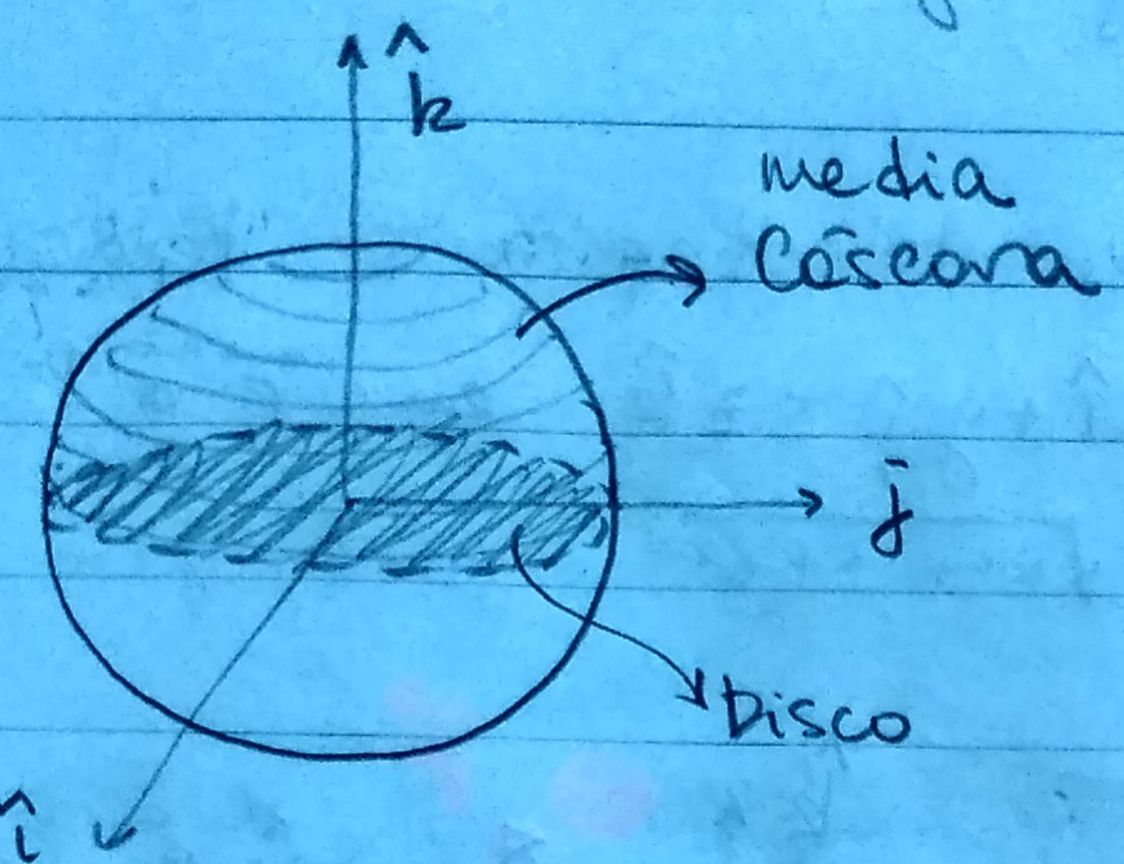
matriz de rotación $(R_{jm})^T$, la traspuesta

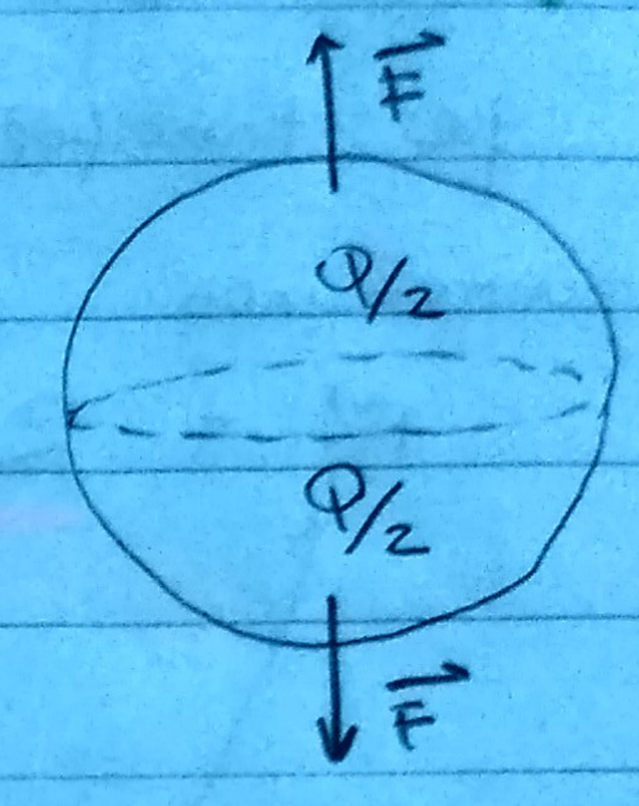
Esto les sirve cuando quieran cambiar de base, y escribir el tensor en otro sistema de coordenadas (esféricos, cilíndricos, etc.)

- OJO: los ESCALARES son tensores de rango 0: son invariantes bajo rotaciones. (Muchas veces van a estar calculando escalares: ahí no complicarse!).

LA UTILIDAD DE $\overleftrightarrow{T}$ para nosotros (en esta etapa): Calcular FUERZAS (por ejemplo en casos estáticos).

• Determinar la fuerza sobre el hemisferio superior de una esfera sólida uniformemente cargada de radio R y carga Q



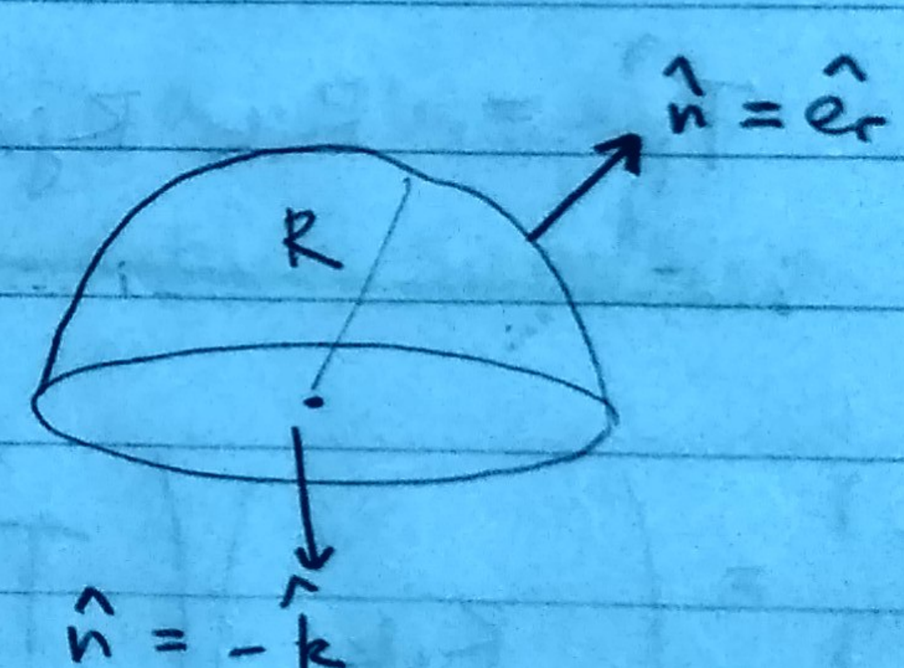


Vamos a usar la expresión $$\vec{F}_{mec} = \int_{S(V)} \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{n}\, ds - \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\overbrace{\int \vec{S}\, d^3r}^{\vec{P}_{em}}}_{\text{ESTO ES 0, mis cargas están QUIETAS, tengo CAMPOS ESTÁTICOS.}}$$

¿Quién es V y quién es S(V)?

El volumen del hemisferio superior

la media cáscara y el disco



$$\underset{\text{sobre el hemisferio}}{\vec{F}_{mec}} = \int_{\text{Disco}} \overleftrightarrow{T} \cdot -\hat{k}\, ds + \int_{\text{media cáscara}} \overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r\, ds$$

1) CÁSCARA:

El campo eléctrico en los pts. de la cáscara

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^2} \hat{e}_r \quad \text{(Sale haciendo Gauss nomás).}$$

$$\vec{r} = R\,\hat{e}_r \quad , \quad \hat{e}_r = \underbrace{\sin\theta\cos\varphi}_{(\hat{e}_r)_x} \hat{\imath} + \underbrace{\sin\theta\sin\varphi}_{(\hat{e}_r)_y} \hat{j} + \underbrace{\cos\theta}_{(\hat{e}_r)_z} \hat{k}$$

Tengo que integrar $\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r$, pero ya sabemos que $\vec{F}$ será según $\hat{k}$ ⇒

Tomo $$(\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r)_z = T_{zx} (\hat{e}_r)_x + T_{zy} (\hat{e}_r)_y + T_{zz} (\hat{e}_r)_z \quad \left(= T_{zj} (\hat{e}_r)_j \right)$$

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right)$$, NO HAY $\vec{B}$

Entonces

$$T_{zx} = \varepsilon_0 E_z E_x = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \underbrace{\cos\theta}_{\hat{e}_{r_z}} \cdot \underbrace{\sin\theta \cos\varphi}_{\hat{e}_{r_x}} \Rightarrow T_{zx} (\hat{e}_r)_x = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \cdot \sin^2\theta \cdot \cos^2\varphi \cdot$$

$$T_{zy} = \varepsilon_0 E_z E_y = \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \frac{\cos\theta \sin\theta \sin\varphi}{\varepsilon_0} \Rightarrow T_{zy} (\hat{e}_r)_y = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \cdot \sin^2\theta \sin^2\varphi$$

$$T_{zz} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \left(\underbrace{-\sin^2\theta \cos^2\varphi - \sin^2\theta \sin^2\varphi}_{-\sin^2\theta} + \cos^2\theta \right)$$

$$\Rightarrow T_{zz} (\hat{e}_r)_z = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta \right)$$

Sumo

$$(\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r)_z = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \left[\underbrace{2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + 2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{2\sin^2\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1} \right]$$

$$(\overleftrightarrow{T} \cdot \hat{e}_r)_z = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta$$

$$\frac{\cancel{2}}{16 \cdot 2 \cdot \cancel{2}} = 4 \cdot 8$$

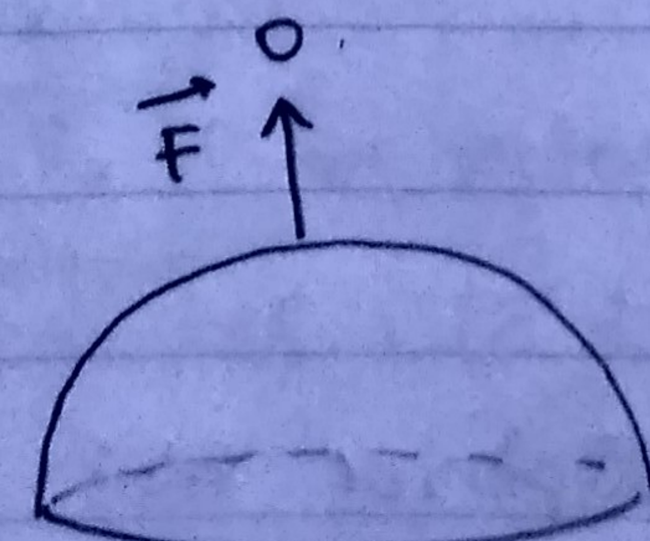
la integral es en la superficie de la media cáscara

$$(\vec{F})_{z \text{ cáscara}} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \underbrace{d\theta \left(R^2 \sin\theta \right)}_{ds} \left[\frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 \cos\theta \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{4\pi R^2} \right)^2 R^2 \frac{1}{2}$$

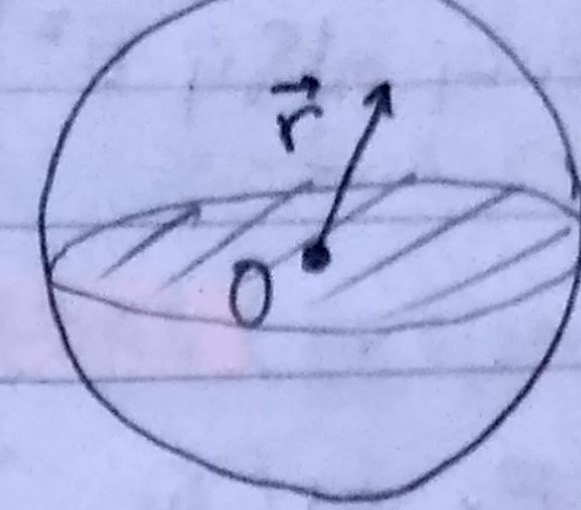
$$\left(\text{con} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \int_0^1 u \, du = \left. \frac{u^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{8 R^2} \right)$$

↳ COMPONENTE VERTICAL de LA FUERZA.



2) Ahora el disco:



$$\vec{F}_{disco} = \int_{disco} \left(\overleftrightarrow{T}\cdot(-\hat{k})\right) ds$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\, r\,\hat{e}_r$$

para $\vec{r}$ dentro de la esfera $|\vec{r}|<R$

También sale con la ley de Gauss...

Tomo componente vertical:

$$\left(\overleftrightarrow{T}\cdot(-\hat{k})\right)_z = T_{zx}\underbrace{(-\hat{k})_x}_{0} + T_{zy}\underbrace{(-\hat{k})_y}_{0} + T_{zz}(-\hat{k})_z = -T_{zz}$$

$\vec{r}$ en la sup. del disco es $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ $(z=0)$ o $(\theta = \pi/2)$

$$E_x = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\right)x \quad , \quad E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\,y \quad , \quad E_z = 0$$

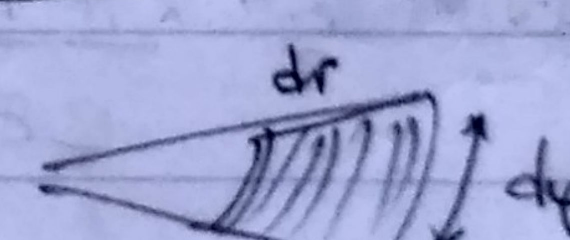
$$x^2+y^2+\cancel{z^2} = r^2 \Rightarrow -(x^2+y^2) = \cancel{z^2} - r^2 = -r^2$$

$$\Rightarrow T_{zz\,disco} = \frac{\varepsilon_0}{2}\underbrace{\left(\cancel{E_z^2} - E_x^2 - E_y^2\right)}_{\sim -(x^2+y^2)} = -\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi R^3\varepsilon_0}\right)^2 r^2 \quad , \quad T_{zz} < 0$$

$$-T_{zz} = +\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 r^2$$

Me había comido este signo!

la integral es $\qquad ds = r\,d\varphi\,dr$



$$\left(\vec{F}_{disco}\right)_z = \int_0^R\int_0^{2\pi} d\varphi\,(-T_{zz})\,r\,dr = \frac{2\pi\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2 \int_0^R r^3\,dr \quad \int_0^R r^3\,dr = \frac{R^4}{4}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{16R^2}$$

↳ Es hacia arriba

la fuerza total sobre el hemisferio superior es:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R^2}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3Q^2}{16R^2}\,\hat{k}$$