Leyes de Conservación en Electrodinámica.

- Primer Comentario: Teorema de Noether. A cada simetría continua de una teoría le corresponde una ley de conservación

Forma LOCAL: $(\vec{r}, t)$

"ley de AMA DE CASA"

deja al sistema sin cambiar

cambio suave en una cantidad

CANTIDAD CONSERVADA		SIMETRÍA	
CARGA ELÉCTRICA	$\longleftrightarrow$	Transf. de gauge	$\to$ SIMETRÍA INTERNA U_1
ENERGÍA	$\longleftrightarrow$	Traslación temporal	Movimientos en el Espacio-tiempo (cinemática)
MOMENTO (cant. de mov.)	$\longleftrightarrow$	Traslación espacial	
MOMENTO ANGULAR	$\longleftrightarrow$	Rotación espacial	Grupo de Poincaré

No estoy incluyendo las transf. de Lorentz (BOOST), por ahora... (en realidad, SÍ).

¿Qué sistema? Fuentes y campos!

Ecs. de Maxwell (en el vacío).

Gauss: $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r},t) = \dfrac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0}$

$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r},t) = 0$ Gauss

Ampère: $\nabla \times \vec{B}(\vec{r},t) = \mu_0 \vec{J}(\vec{r},t) + \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}$

$\nabla \times \vec{E}(\vec{r},t) = -\dfrac{\partial \vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}$ Faraday

- Cons. carga eléctrica. Ec. de Continuidad.

Gauss

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\rho(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\vec{E}(\vec{r},t))$$

las derivadas conmutan

$$= \varepsilon_0\, \nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}\right) = \varepsilon_0\, \nabla\cdot\left(\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}(\vec{r},t)\right) = -\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t)$$

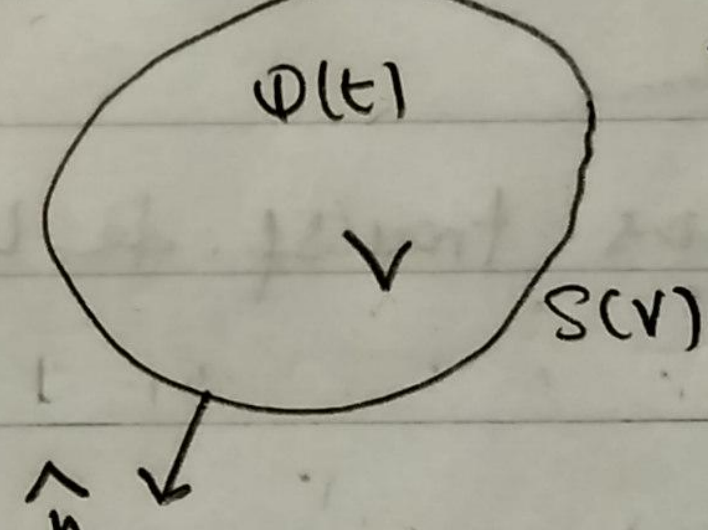
Ampère

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{B}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t) = 0}$$

Derivada temporal — DIVERGENCIA

i) ¿Dónde usé la invariancia de gauge?

ii) ¿Cómo implica esto la conservación de la carga eléctrica local?



V no cambia con t

$$\varphi(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\, d^3r \Rightarrow$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \int_V \frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} d^3r = \int_V -\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r},t)\, d^3r \underset{\text{Teo. div}}{=} \underbrace{-\int_{S(V)} \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\hat{n}\, ds}_{\text{Menos el flujo de corriente hacia afuera del volumen}}$$

El cambio en la carga encerrada en un volumen V

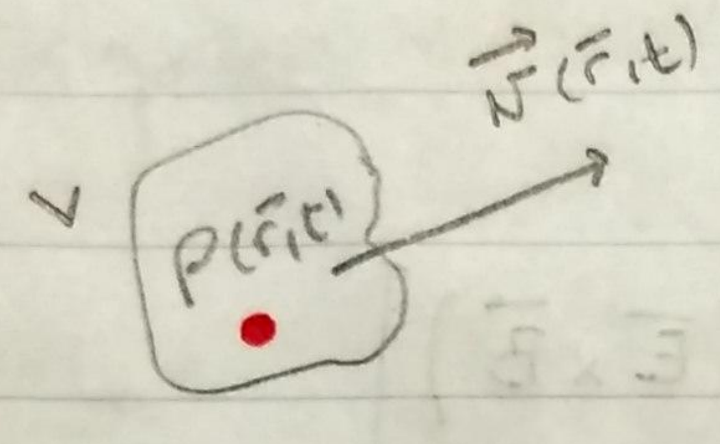
SALE J $\longrightarrow$ Tengo MENOS φ

ENTRA J $\longrightarrow$ Tengo MÁS φ

Esto es PARA CUALQUIER V en el universo, para cualquier t...

La carga se conserva localmente.

Conservación de la energía. Teorema de Poynting.



Cargas fuente $\rho(\vec{r},t)$ que se mueven con velocidades $\vec{v}(\vec{r},t)$.

$\Rightarrow \vec{J}(\vec{r},t) = \rho(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$

Sobre estas cargas ejercen fuerzas unos campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ y $\vec{B}(\vec{r},t)$.

Estos campos, para c/ carga q_i, son los generados POR EL RESTO de LA DISTRIBUCIÓN. (Esto ya lo comentamos en la CLASE 1).

La fuerza que hacen los campos sobre las distribuciones de carga es:

$$\vec{F}(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) d^3r = \int_V \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\,d^3r + \int_V \vec{J}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\,d^3r$$

Calculamos la POTENCIA MECÁNICA que hacen los campos al mover las cargas (al moverlas un poquito) en un intervalo de tiempo dt, en el que se desplazan $d\vec{l} \Rightarrow \frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{v}$

$$W = \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_V \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l}\,d^3r + \int_V \Big(\underbrace{\vec{J}(\vec{r},t)\times\vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{l}}_{\vec{J} \text{ y } \frac{d\vec{l}}{dt} \text{ son } \parallel}\Big)d^3r$$

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V \rho(\vec{r},t)\vec{E}(\vec{r},t)\cdot\vec{v}\,d^3r$$

* ¿Por qué sólo derivo $\frac{d\vec{l}}{dt}$? $\Big\}$ ρ y los campos no cambian, ρ sólo se mueve... Ver Jackson

↳ Si prefieren: $W = \vec{F}\cdot d\vec{l}$ y $Pot_{mec.} = \frac{dW_{mec.}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V \vec{J}(\vec{r},t)\cdot\vec{E}(\vec{r},t)\,d^3r = \int_V \left(\frac{\nabla\times\vec{B}}{\mu_0} - \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot\vec{E}\,d^3r =$$

de la ley de Ampère

[Quiero una ley de conservación:
- DIVERGENCIA
- Derivada $\partial/\partial t$

Truco 1) $\vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{B})$ como div.

manual 4. $\nabla\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}\cdot(\nabla\times\vec{F}) - \vec{F}\cdot(\nabla\times\vec{G})$

Voy a hacer aparecer una divergencia!

$$\rightarrow \frac{\vec{E}.(\nabla\times\vec{B})}{\mu_0} : \quad \nabla.(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}.(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}.(\nabla\times\vec{B})$$

$$\| $$

$$\frac{1}{\mu_0}\Big[(\vec{B}.\underbrace{\nabla\times\vec{E}}_{\text{Faraday}\ \downarrow\ -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}) - \nabla.(\vec{E}\times\vec{B})\Big] = \frac{1}{\mu_0}\Big[-\vec{B}.\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla.(\vec{E}\times\vec{B})\Big]$$

$$\Rightarrow \frac{dW_{mec}}{dt} = \int_V \frac{\vec{E}.(\nabla\times\vec{B})}{\mu_0}\, d^3r - \int_V \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}\, d^3r =$$

$$= \int_V -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{B}\, d^3r - \int_V \frac{\nabla.(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0} d^3r - \int_V \varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}\, d^3r$$

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = -\int_V \left[\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E}\right] d^3r - \int_V \frac{\nabla.(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}\, d^3r$$

Derivada temporal:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{C}.\vec{C}) = \vec{C}.\frac{\partial\vec{C}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{C}}{\partial t}.\vec{C} = 2\vec{C}.\frac{\partial\vec{C}}{\partial t} \Rightarrow \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.\vec{B} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{B}.\vec{B}), \quad \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.\vec{E} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}.\vec{E})$$

El primer término es: [ ]

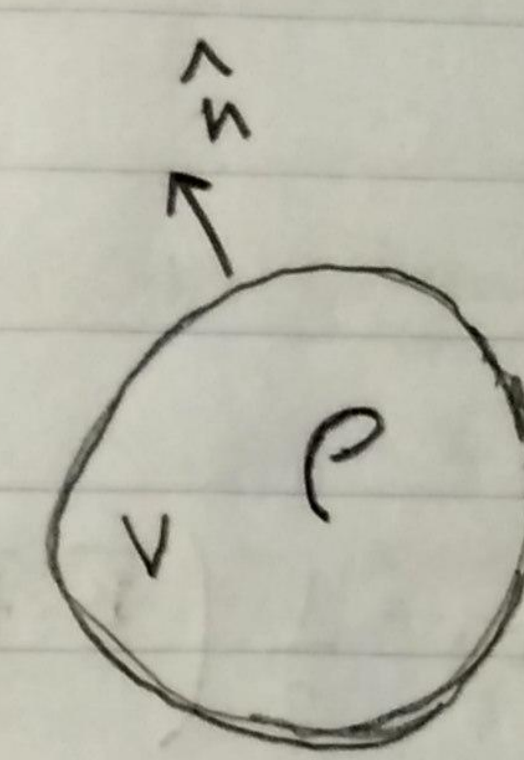
$$\left[\frac{1}{\mu_0}\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{B}.\vec{B})}{\partial t} + \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}.\vec{E})\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{B}.\vec{B}}{\mu} + \varepsilon_0\,\vec{E}.\vec{E}\right)\right)$$

Esto se DEFINE como la ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA en los campos (por unidad de volumen)

$$u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\frac{\vec{B}.\vec{B}}{\mu_0} + \varepsilon_0\,\vec{E}.\vec{E}\right) \quad y \quad \int_V u_{EM}\, d^3r = U_{EM} \text{ (la energía)}.$$

También definimos $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$, vector de Poynting.

Nos queda:



$$\frac{dW_{mec}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{EM}\, d^3r - \int_V \nabla \cdot \vec{S}\, d^3r$$

Teo. div

$$= -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{EM}\, d^3r - \int_{S(V)} \vec{S} \cdot \hat{n}\, ds$$

Flujo del vector de Poynting a través de $S(V)$..

$$\frac{dW_{mec}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{EM}\, d^3r - \int_V \nabla \cdot \vec{S}\, d^3r$$

Esto era

$\int_V \vec{J} \cdot \vec{E}\, d^3r \Rightarrow$ Podemos poner esta ley así:

$$\boxed{\vec{J} \cdot \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} u_{EM} + \nabla \cdot \vec{S} = 0} \quad \text{ó} \quad \boxed{\frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S} = -\vec{J} \cdot \vec{E}}$$

El vector de Poynting es un FLUJO de ENERGÍA:

$$[\vec{S}] = \frac{\text{Joule}}{m^2 . S}$$

Recuerden la def. de FLUJO

Flujo de una "cantidad" $\equiv \frac{\text{cantidad}}{\text{área . tiempo}}$

A esto también le llamamos CORRIENTE

Ojo que los libros le ponen cualquier nombre:

- Zangwill: $\vec{S}$ is the "current density of electromagnetic energy" ⇝ Esto es por analogía con ec. continuidad
- Griffiths: $\vec{S}$ is the "energy flux density"
- Vanderlinde: $\vec{S}$ is the "energy flux" ✓

El problema es que en matemáticas le llamamos FLUJO a la integral de Sup. del campo.

ver WIKIPEDIA "FLUX".

• Comentarios

1) En la MATERIA

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{libre}$$

y hacemos el mismo procedimiento...

$$\Rightarrow u_{EM} = \frac{1}{2}\left(\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{E} \cdot \vec{D}\right) \quad y \quad \vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

te queda $\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{mec} + u_{EM}\right) + \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) = 0$

Y no se puede resolver a menos que el medio sea LINEAL.

$$u_{mec} = \vec{J}_{libre} \cdot \vec{E}$$

2) El vector de Poynting NO ES UNA CANTIDAD OBSERVABLE

Podríamos sumarle un rotor : $\nabla \times \vec{X}$

$$\vec{S} = \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) + \left(\nabla \times \vec{X}\right) \Rightarrow \nabla \cdot \vec{S} = \nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}\right)$$

porque $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{X}) = 0$

Esto no tiene consecuencias <u>físicas</u>.

3) Enunciado de la cons. de la energía en ESPAÑOL:

La tasa de cambio de (la energía electromagnética dentro de un cierto volumen, más la energía que fluye a través de la frontera de este volumen), es el opuesto de la tasa de cambio del trabajo que ejercen los campos sobre las cargas dentro del volumen:

$$\int_V d^3r \, \frac{\partial u_{EM}}{\partial t} + \int_{S(V)} \vec{S} \cdot \hat{n} \, ds = -\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \, d^3r = -\frac{d W_{mec}}{dt}$$

Conversión de energía eléctrica a mecánica/ CALOR.