

¿CÓMO RESOLVER LA ECUACIÓN DE POISSON? Problemas de contorno

Método de las imágenes

• Funciones de Green. Forma integral de la ec. de Poisson.

↳ separación de variables. Problema de autovalores de Sturm-Liouville.
(Ec. de Laplace).

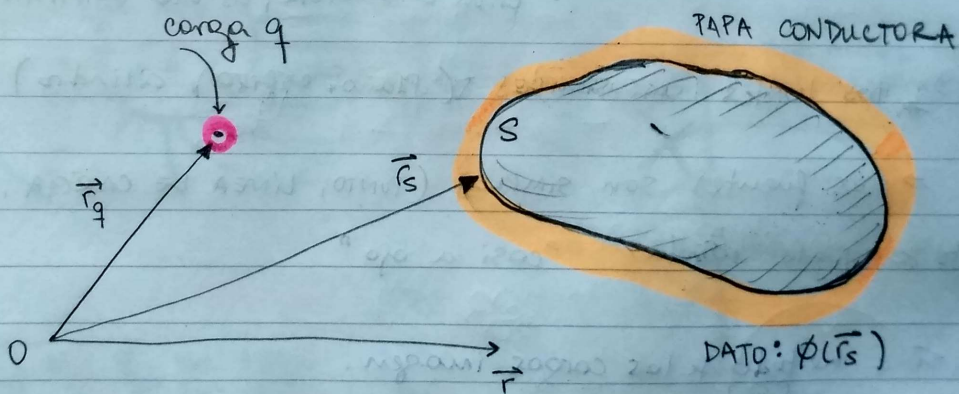
↳ integración directa (de la ec. diferencial).

Empezamos con el

Método de las imágenes (cargas imagen), pero primero repasemos el problema en general

Ejemplo:

En el vacío



La solución a este problema es UNA SUPERPOSICIÓN

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|} + \text{solución de } \nabla^2\phi = 0 \text{ en } V, \text{ que sirve para cumplir las condiciones de borde en } S \text{ y en infinito}$$

Sol. Particular de

$$\nabla^2\phi = -\frac{q\delta(\vec{r} - \vec{r}_q)}{\epsilon_0}$$

(en el espacio LIBRE)

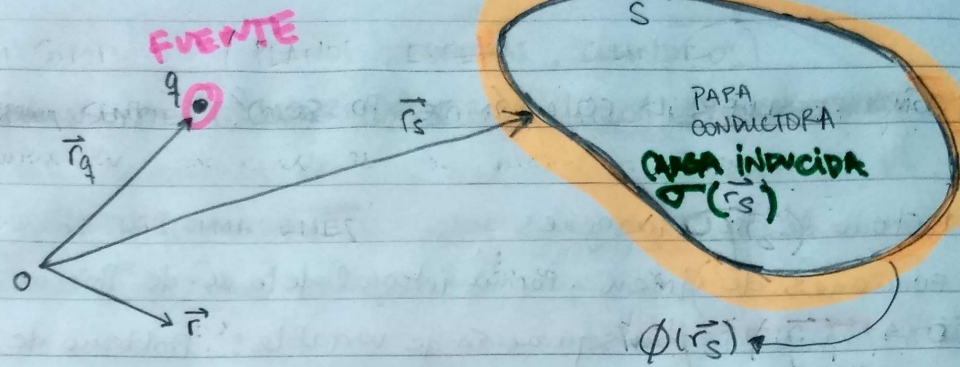
+ Sol. de la Homogénea

$$\nabla^2\phi = 0 \text{ en } V$$

La SUMA tiene que satisfacer las CONDICIONES DE BORDE

Solución que verifica Poisson y cond. de borde ES ÚNICA!!

VACÍO



$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_q|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{d^3r' \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{Acá } \rho(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}_s) \delta(\vec{r}' - \vec{r}_s)$$

¿PASA SI $\phi(\vec{r}_s)$ es un DATO?

En un CONDUCTOR, es una CONSTANTE ...

Si \rightarrow los bordes son SIMPLES (Plano, esfera, cilindro)

\rightarrow las fuentes son SIMPLES (PUNTO, LÍNEA DE CARGA, ...)

Esto se puede resolver "casi a ojo"

Ahora sí: Método de las cargas imagen.

Encontrar una (o un grupito de) cargas que generen el mismo campo (y potencial) eléctrico que produce la carga inducida por las fuentes.

El ejemplo:

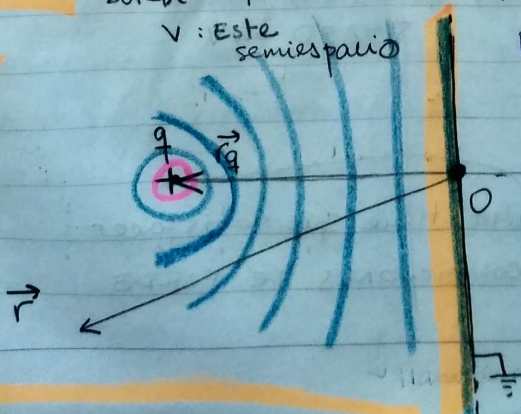
FUENTE: carga puntual

BORDE: plano conductor infinito, conectado a tierra:

V : Este semiespacio

lado de atrás: NO ESTÁ EN MI V

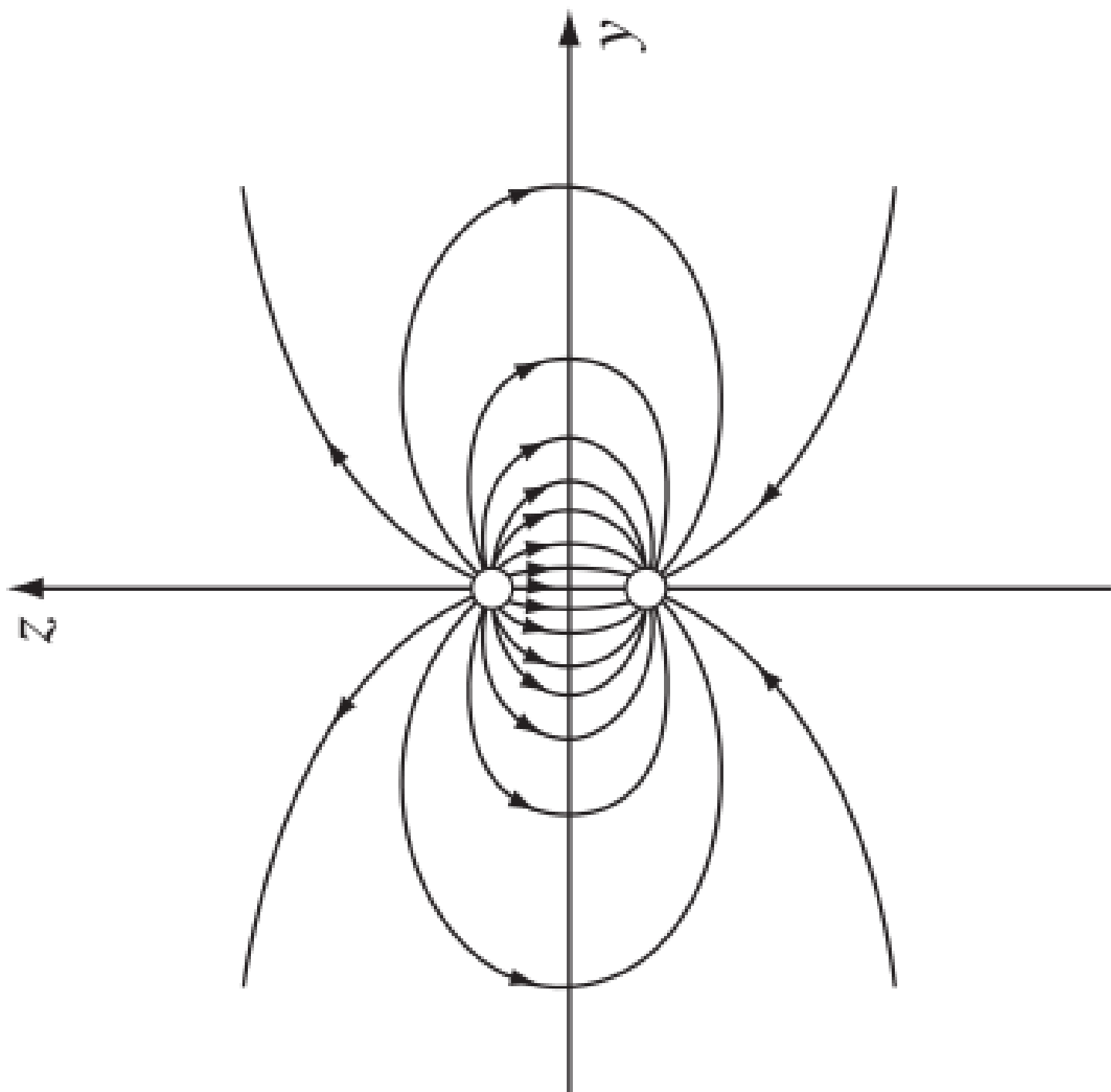
$\phi(\vec{r})$



q_0 carga imagen

$$\vec{r}_0 = -\vec{r}_q$$

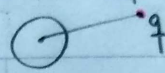
$$q_0 = -q$$



UN ejemplo: FUENTE: carga puntual a distancia h del centro de una esfera.

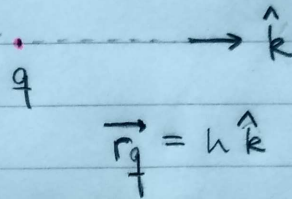
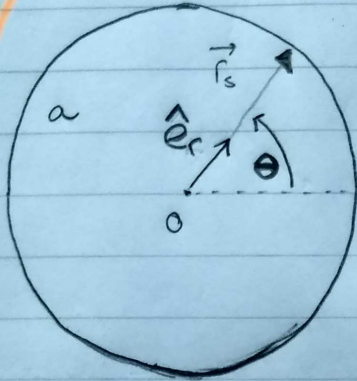
BORDE: Esfera conductora de radio a , con potencial $\phi = 0$

V : Afuera de la esfera



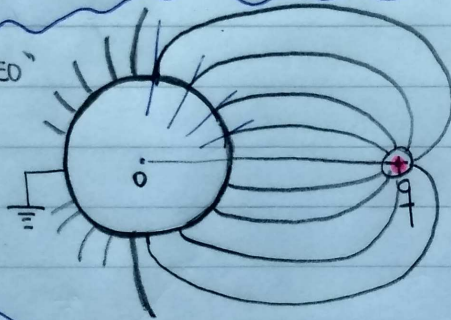
OBVIAMENTE: COORDS. ESFÉRICAS!

$$\phi(\vec{r}_s) = 0 \quad \vec{r}_s = a \hat{e}_r$$

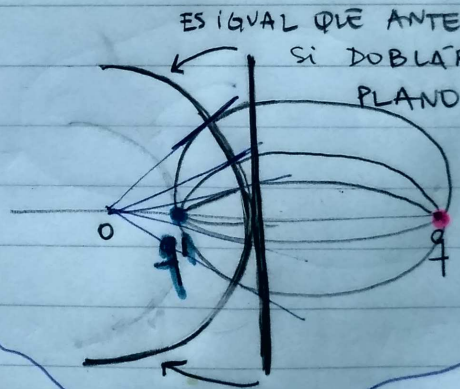


líneas de campo \perp a la esfera, que es una EQUIPOTENCIAL

lo que VO VEO



ES IGUAL QUE ANTES, PERO COMO SI DOBLÁRAMOS EL PLANO



Ojo que la carga imagen se va a llamar q'

¿Dónde pongo q' que haga que $\phi_q + \phi_{q'}(\vec{r}_s) = 0$?

q' entre 0 y q

NO HAY OTRA: MIREN LA SIMETRÍA !!

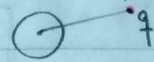
$$\vec{r}_{q'} = b \hat{k}, \text{ con } b < a$$

$$\phi(\vec{r}_s) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r}_s - \vec{r}_q|} + \frac{q'}{|\vec{r}_s - \vec{r}_{q'}|} \right) = 0$$

UN ejemplo: FUENTE: carga puntual a distancia h del centro de una esfera.

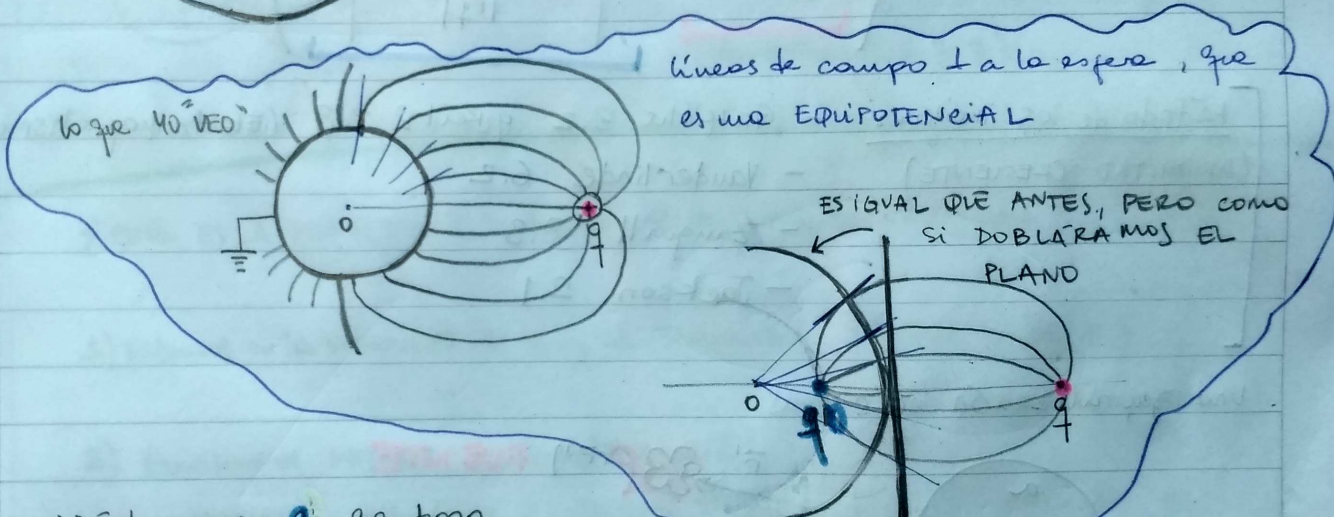
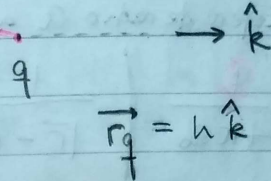
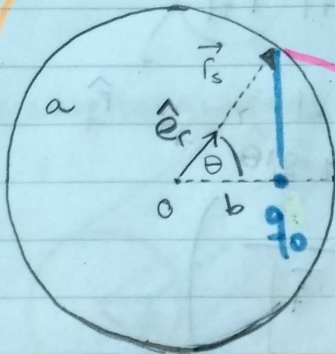
BORDE: Esfera conductora de radio a , con potencial $\phi = 0$

✓: Afuera de la esfera



OBVIAMENTE: COORDS. ESFÉRICAS!

$$\phi(\vec{r}_s) = 0 \quad \vec{r}_s = a \hat{e}_r$$



lo que VO VEO

líneas de campo \perp a la esfera, que es una EQUIPOTENCIAL

ES IGUAL QUE ANTES, PERO COMO SI DOBLÁRAMOS EL PLANO

¿Dónde pongo q_0 que haga que $\phi_q + \phi_{q_0}(\vec{r}_s) = 0$?

Es q_0

q_0 entre 0 y q

NO HAY OTRA: MIREN LA SIMETRÍA !!

$$\vec{r}_{q_0} = b \hat{k}, \text{ con } b < a$$

$$\phi(\vec{r}_s) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r}_s - \vec{r}_q|} + \frac{q_0}{|\vec{r}_s - \vec{r}_{q_0}|} \right) = 0$$

$$|\vec{r}_s - \vec{r}_{q_0}| = (a^2 + b^2 - 2ab \cos\theta)^{1/2}$$

$$|\vec{r}_s - \vec{r}_q| = (a^2 + h^2 - 2ah \cos\theta)^{1/2}$$

Si se copan todas las cuentas! Tiene que valer $\forall \theta \Rightarrow$ hallo b y q' :

$$q_0 = -q \left(\frac{a}{h} \right) \quad b = \frac{a^2}{h} \quad (\vec{r}_q = h \hat{k}, \vec{r}_{q_0} = b \hat{k})$$

Se puede generalizar, porque el eje \hat{k} puede ser cualquiera

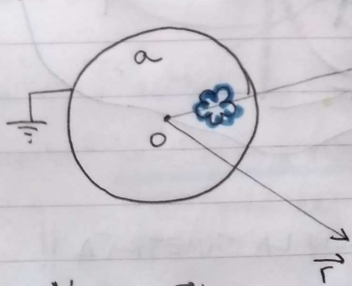
$$q \text{ en } \vec{r}_q, \quad q_0 = -\frac{a}{|\vec{r}_q|} q \text{ en } \vec{r}_{q_0} = \frac{a^2}{|\vec{r}_q|} \left(\frac{\vec{r}_q}{|\vec{r}_q|} \right)$$

FUENTE: q en \vec{r}_q } la sol. es el \vec{r}_q
 BORDE: Esfera de radio a a tierra } ϕ de q y q'

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{a/|\vec{r}_q|}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}_q|^2} \vec{r}_q \right|} \right)$$

- Método de las imágenes - Griffiths 3.2 y Reitz 3.9 (Electromagnetismo)
 (DIFICULTAD CRECIENTE) - Vanderlinde 6.2
 - Zangwill 8.3
 - Jackson 2.1

Una generalización más:



\vec{r}' FUENTE

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3r' \rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a/|\vec{r}'|}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' \right|} \right)$$

para \forall tg. $|\vec{r}| > a$

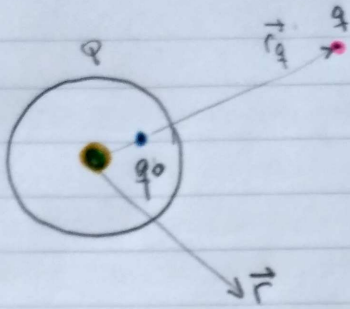
• VER: RECIPROCIDAD entre q y q_0 si ves ADENTRO

→ OTROS PROBLEMAS DE ESFERAS

- Carga q y esfera conductora a potencial ϕ_0 : Pongo q' y además agrego $q_0 = 4\pi\epsilon_0 a \phi_0$ en el origen, que acomoda el potencial de la esfera.
- Carga q y esfera aislada conductora con carga neta Q (se usan cargas imagen en 0 para cambiar la carga neta)

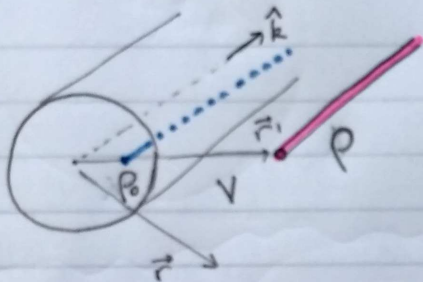
FUENTE: q

BORDE: Esfera conductora aislada con carga neta Q (Zangwill 8.3.6)



$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{a/|\vec{r}_q|}{|\vec{r} - \frac{a^2}{r_q^2} \vec{r}_q|} \right] + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q + q \frac{a}{|\vec{r}_q|}}{|\vec{r}|} \right]$$

PROBLEMAS DE CILINDROS: Distribución ρ invariante por desplazamientos en \hat{k} .



$$\phi(\vec{r}) = \frac{-1}{2\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \ln \left| \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \frac{a^2}{r'^2} \vec{r}'|} \right| d^3r'$$

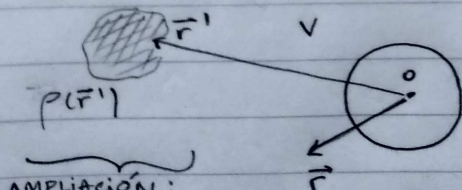
(Vanderlinde 6.2.3)

¿CUÁL ES LA MORALEJA? ¿Qué aprendimos usando imágenes?

1) Estamos en la situación de hoy al comienzo (VOLVER a PAG 1)

2) Escribamos METOR: FUENTE EN \vec{r}'

CONSEGUIMOS soluciones de Poisson, con condiciones de borde de DIRICHLET $\phi(\vec{r}_s) = \text{cte}$. Para bordes con una GEOMETRÍA PARTICULAR (ESFERA) las soluciones tienen esta pinta:



AMPLIACIÓN:

$$\rho_i(\vec{r}') = q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r'$$

+ SOLUCIÓN DE LAPLACE en V

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ es la FUNCIÓN DE GREEN de ESA GEOMETRÍA (en este caso, la esfera)

Si se copan hacen las cuentas! Tiene que valer $\forall \theta \Rightarrow$ hallo b y q' :

$$q_0 = -q \left(\frac{a}{h} \right) \quad b = \frac{a^2}{h} \quad (\vec{r}_q = h \hat{k}, \quad \vec{r}_{q_0} = b \hat{k})$$

Se puede generalizar, porque el eje \hat{k} puede ser cualquiera

$$q \text{ en } \vec{r}_q, \quad q_0 = -\frac{a}{|\vec{r}_q|} q \text{ en } \vec{r}_{q_0} = \frac{a^2}{|\vec{r}_q|} \left(\frac{\vec{r}_q}{|\vec{r}_q|} \right)$$

FUENTE: q en \vec{r}_q

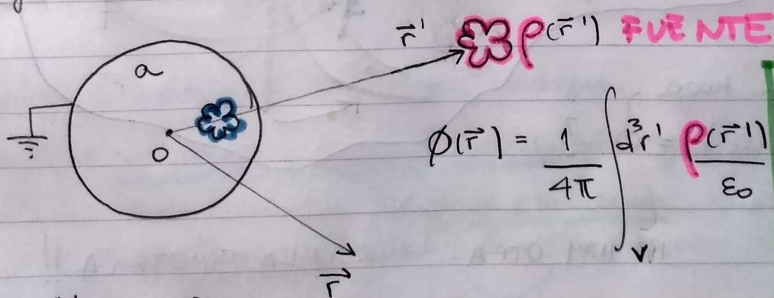
BORDE: Esfera de radio a a tierra

la sol. es el ϕ de q y q'

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{a/|\vec{r}_q|}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}_q|^2} \vec{r}_q \right|} \right)$$

- Método de las imágenes - Griffiths 3.2 y Reitz 3.9 (Electromagnetismo).
 (DIFICULTAD CRECIENTE) - Vanderlinde 6.2
 - Zangwill 8.3
 - Jackson 2.1

Una generalización más:



$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V d^3r' \rho(\vec{r}') \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{|\vec{r}'|}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}' \right|} \right)$$

Para V tq. $|\vec{r}| > a$

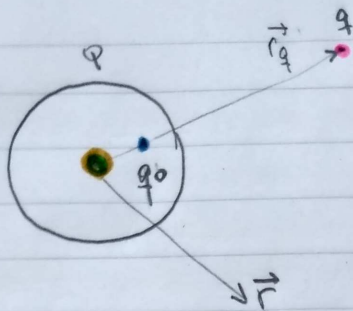
• VER: RECIPROCIDAD entre q y q_0 si V es ADENTRO

→ OTROS PROBLEMAS DE ESFERAS

- Carga q y esfera conductora a potencial ϕ_0 : Pongo q' y además agrego $q_0 = 4\pi\epsilon_0 a \phi_0$ en el origen, que acomoda el potencial de la esfera.
- Carga q y esfera aislada conductora con carga neta Q (se usan cargas imagen en 0 para cambiar la carga neta)

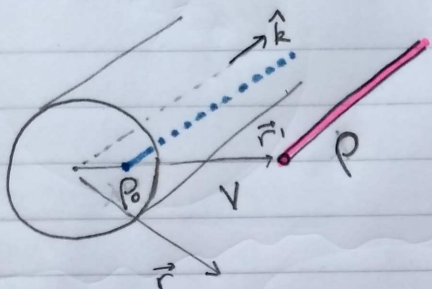
FUENTE: q

BORDE: Esfera conductora aislada con carga neta Q (Zangwill 8.3.6)



$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_q|} - \frac{a/|\vec{r}_q|}{|\vec{r} - \frac{a^2}{r_q^2} \vec{r}_q|} \right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q + q \frac{a}{|\vec{r}_q|}}{|\vec{r}|} \right)$$

PROBLEMAS DE CILINDROS: Distribución ρ invariante por desplazamientos en \hat{k} .



$$\phi(\vec{r}) = \frac{-1}{2\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{|\vec{r} - \frac{a^2}{r'^2} \vec{r}'|} \right) d^3r'$$

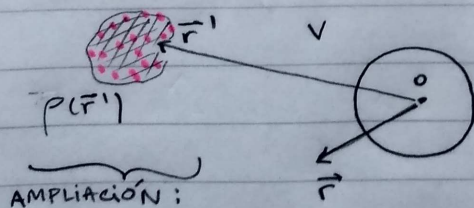
(Vanderlinde 6.2.3)

¿CUÁL ES LA MORALEJA? ¿Qué aprendimos usando imágenes?

1) Estamos en la situación de hoy al comienzo (VOLVER a PÁG 1)

2) Escribamos MEJOR: FUENTE EN \vec{r}'

CONSEGUIMOS soluciones de Poisson, con condiciones de borde de DIRICHLET $\phi(\vec{r}_s) = \text{cte}$. Para bordes con una GEOMETRÍA PARTICULAR (ESFERA) las soluciones tienen esta pinta:



AMPLIACIÓN:

$$\rho_i(\vec{r}') = q_i \delta(\vec{r}' - \vec{r}_i)$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r'$$

+ SOLUCIÓN DE LAPLACE en V

$G(\vec{r}, \vec{r}')$ es la FUNCIÓN DE GREEN de ESA GEOMETRÍA (en este caso, la esfera)