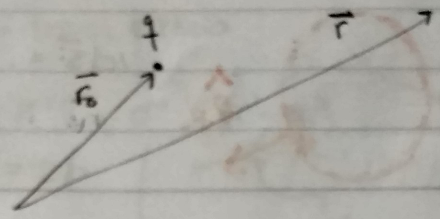
SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE POISSON

<u>Un caso especial</u>: UNA CARGA PUNTUAL q en $\vec{r}_0$: $\rho(\vec{r}\,') = q\,\delta^3(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)$

(Y NADA MÁS EN TODO EL ESPACIO)



¿Cuánto vale $\phi(\vec{r})$ generado por q?

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{q\,\delta^3(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\delta^3(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'$$

V = todo el espacio

Ahora

$$\int_V \frac{\delta^3(\vec{r}\,'-\vec{r}_0)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{\infty} dr' \,\frac{\operatorname{sen}\theta'\, r'^2}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\frac{\delta(r'-r_0)\,\delta(\theta'-\theta_0)\,\delta(\varphi'-\varphi_0)}{r'^2 \operatorname{sen}\theta'}$$

↳ ES SUSTITUIR $\vec{r}\,'$ por $\vec{r}_0$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

$$\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}_0|}$$

¡Que es el viejo y querido potencial de la carga puntual, solo en el espacio!

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\right)$$

$$\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$ ¡Como debe ser!

Unicidad de las soluciones de la ec. de Poisson con condiciones de borde

PREVIO: Identidades de Green (Ver MANUAL del curso, sección 5)

$\varphi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$ funciones escalares, $\vec{F}(\vec{r})$ campo vectorial C^1

$$\underbrace{\int_V \nabla\cdot\vec{F}\, d^3r = \int_{S(V)} \vec{F}\cdot\hat{n}\, ds}_{\text{Teo. Gauss}} \qquad \text{si } \vec{F} = \psi(\vec{r})\underbrace{\nabla\varphi(\vec{r})}_{\text{VECTOR!}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_V \nabla\cdot(\psi\nabla\varphi)\, d^3r = \boxed{\int_V d^3r\left(\nabla\psi\cdot\nabla\varphi + \psi\nabla^2\varphi\right) = \int_{S(V)}(\psi\nabla\varphi)\cdot\hat{n}\, ds} \quad \mathbf{G1}$$

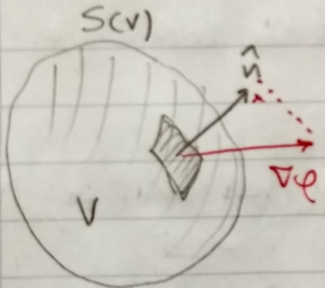
Primera identidad de Green.

Ahora cambiamos $\varphi \leftrightarrow \psi$ y se lo restamos a G1

$$G1 - \left(\int_V d^3r\left(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi + \varphi\nabla^2\psi\right) = \int_{S(V)}(\varphi\nabla\psi)\cdot\hat{n}\, ds\right) =$$

$$\mathbf{G2} \quad \boxed{\int_V d^3r\left(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi\right) = \int_{S(V)}\left(\psi\nabla\varphi - \varphi\nabla\psi\right)\cdot\hat{n}\, ds}$$

Segunda identidad de Green.



términos: $\nabla\varphi\cdot\hat{n}$ y $\nabla\psi\cdot\hat{n}$

Se define la "derivada normal":

$$\hat{n}\cdot\nabla\varphi \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial n}$$: COMPONENTE $\perp$ A LA SUPERFICIE DEL GRADIENTE DE UNA FUNCIÓN φ

• Prueba de unicidad (por absurdo: si hay 2 soluciones, son la misma*)

1) Sean $\alpha(\vec{r})$ y $\beta(\vec{r})$ dos soluciones de la ec. de Poisson:

$$\nabla^2\alpha = -\rho/\varepsilon_0 \quad y \quad \nabla^2\beta = -\rho/\varepsilon_0 \quad \Rightarrow \quad \text{Sea } \gamma(\vec{r}) = \alpha(\vec{r}) - \beta(\vec{r}) \Rightarrow \nabla^2\gamma = 0$$

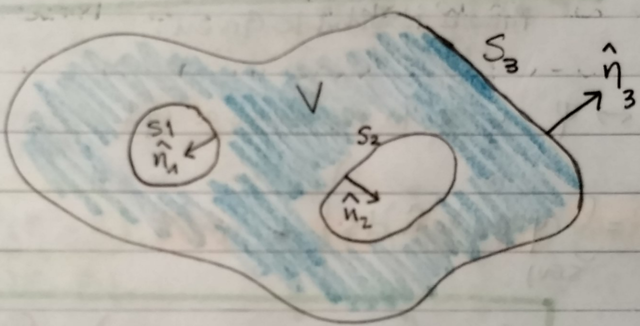
$\Rightarrow$ la resta de 2 soluciones de Poisson, cumple Laplace.

* a menos de una constante

2) Tomo **G1** para $\psi = \varphi = \gamma$: $\int_V d^3r \left(\underbrace{\nabla\gamma \cdot \nabla\gamma}_{|\nabla\gamma|^2} + \gamma \underbrace{\nabla^2\gamma}_{0\ (1)}\right) = \int_{S(V)} (\gamma \nabla\gamma) \cdot \hat{n}\, ds$

Llamemos $I = \int_{S(V)} (\gamma\, \nabla\gamma) \cdot \hat{n}\, ds = \sum_{\substack{i \\ \text{superficies}}} \int_{S_i} (\gamma \nabla\gamma) \cdot \hat{n}_i\, ds_i$

Imagínense que tengo un volumen con borde en varias superficies S_i :



Cada $\hat{n}_i$ es SALIENTE a V

Tenemos que $\underbrace{\int_V d^3r\ |\nabla\gamma|^2}_{\text{Esto es } \geq 0 \text{ siempre, porque es la integral de un CUADRADO}} = I$

3) Si ELIJO condiciones de borde para $\gamma(\bar{r})$ en cada superficie S_i que hagan que I sea $= 0$, eso implica que $|\nabla\gamma| = 0 \Rightarrow \gamma(\bar{r})$ es CONSTANTE en V.

Ahora $\gamma(\bar{r}) = \alpha(\bar{r}) - \beta(\bar{r}) = CTE \Rightarrow \alpha(\bar{r}) = \beta(\bar{r}) + CTE$: si hay 2 soluciones Poisson en V, estas difieren sólo en una constante.

4) ¿CÓMO ELIJO el valor de $\gamma(\vec{r})$ en las superficies S_i de forma de ANULAR la integral I ?

$$I = \sum_i \int_{S_i} (\gamma \nabla \gamma) \cdot \hat{n}_i \, ds_i = 0 \;?$$

Hay 3 opciones:

• A) Digo cuánto tiene que ser el valor de las soluciones (todas) en cada punto de cada superficie S_i (bordes)

Sean $\vec{r}_{S_i}$ los puntos de las superficies S_i ⇒

$$\alpha(\vec{r}_{S_i}) = \beta(\vec{r}_{S_i}) \;\forall i \Rightarrow \gamma(\vec{r}_{S_i}) = 0 \Rightarrow I = 0$$

FIJAR EL VALOR QUE TIENEN QUE TENER LAS SOLUCIONES DE POISSON EN TODOS LOS BORDES DEL VOLUMEN V SE LLAMA IMPONER CONDICIONES DE DIRICHLET.

(Un ejemplo: todos los bordes conductores conectados a tierra ...)

• B) Digo cuánto vale la "componente normal del gradiente" de las soluciones en cada punto de cada superficie S_i.

$$\nabla\alpha(\vec{r}_{S_i}) = \nabla\beta(\vec{r}_{S_i}) \Rightarrow \nabla\alpha(\vec{r}_{S_i})\cdot\hat{n}_i = \nabla\beta(\vec{r}_{S_i})\cdot\hat{n}_i \Rightarrow$$

$$\nabla\gamma(\vec{r}_{S_i})\cdot\hat{n}_i = 0 \quad \forall\, S_i \Rightarrow I = 0.$$

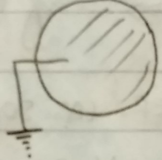
FIJAR EL VALOR DE LA DERIVADA NORMAL QUE TIENEN QUE TENER LAS SOLUCIONES DE POISSON EN TODOS LOS BORDES DEL VOLUMEN V SE LLAMA IMPONER CONDICIONES DE NEUMANN.

• C) Puedo hacer una fijación MIXTA: fijar el valor de las soluciones en alguna parte de las superficies S_i, y fijar el valor de la derivada normal en otras: eso hace $I = 0$ también.

5) Entonces si ocurren las opciones (A) DIRICHLET o (B) NEUMANN o (C) MIXTO, las soluciones de la ecuación de Poisson en el volumen V sólo difieren en un valor <u>constante</u> (la solución es única a menos de una constante).

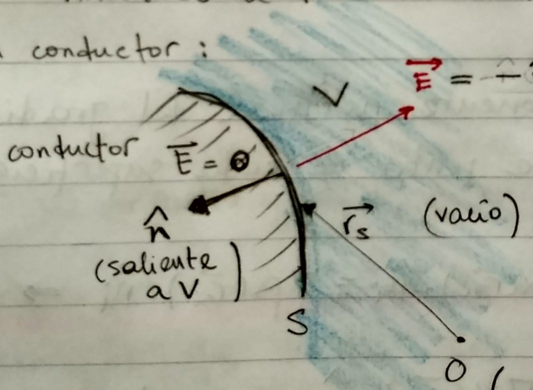
6) OBSERVACIONES (FÍSICAS) Cuando resolvemos la ec. de Poisson para el potencial eléctrico $\phi(\vec{r})$: $\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$,

a- Imponer condiciones de DIRICHLET es decir cuánto vale el potencial en las superficies. Si son superficies conductoras, tiene que ser un valor constante ($\phi = 0$ si están conectados a tierra).



b- Imponer condiciones de NEUMANN en la superficie de un conductor está vinculado a dar el valor de la densidad superficial σ.

En un conductor:



$$\vec{E} = -\frac{\hat{n}\,\sigma_s}{\varepsilon_0} = -\nabla\phi(\vec{r}_s)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\nabla\phi(\vec{r}_s)\cdot\hat{n}}_{\text{Derivada normal}} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$

(cuidado con el sentido de este $\hat{n}$ ...)

c- En una superficie conductora, si damos el valor de el potencial (DIRICHLET) y la carga (o σ) (NEUMANN) a la vez, el problema queda SOBREDETERMINADO ...