UNIDAD 2:

Teoría del POTENCIAL: estudio de las ecuaciones de Laplace y Poisson.
Problemas de contorno, funciones de Green y separación de variables.

- Venimos diciendo que dadas las distribuciones de cargas $\rho(\vec{r},t)$ y de corrientes $\vec{J}(\vec{r},t)$, podemos hallar los potenciales $\vec{A}(\vec{r},t)$ y $\phi(\vec{r},t)$; para después encontrar los campos $(\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H})$.

Las ecuaciones a resolver son estas: (ya las vimos)

$$
* \begin{cases} \nabla^2\phi + \dfrac{\partial(\nabla\cdot\vec{A})}{\partial t} = -\dfrac{\rho_{libre}(\vec{r},t)}{\varepsilon_0} \\ \Box\vec{A} + \nabla\left(\nabla\cdot\vec{A} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J}(\vec{r},t) \end{cases}
$$

¿En qué casos podemos hallar soluciones para ϕ y $\vec{A}$?

Pensemos en un CASO FÁCIL: Situación ESTÁTICA: Todas las cantidades son independientes de t; y "$\dfrac{\partial}{\partial t}(\ ) = 0$"

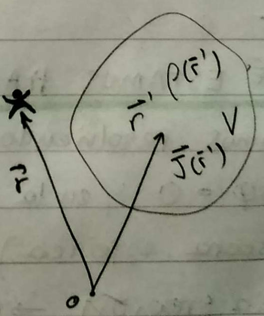
- Las ecs. quedan así

$$
\begin{cases} \nabla^2\phi(\vec{r}) = -\dfrac{\rho_{libre}(\vec{r})}{\varepsilon_0} & \text{(1 Ecuación escalar)} \rightarrow \text{ELECTROSTÁTICA} \\ \nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{J}_{libre}(\vec{r}) & \text{(3 Ecuaciones escalares)} \rightarrow \text{MAGNETOSTÁTICA} \end{cases}
$$

Si las cargas están en un volumen V:
Si sabemos cómo son $\rho(\vec{r}')$ y $\vec{J}(\vec{r}')$; podemos hallar las soluciones:

INTEGRAL DE COULOMB:

- $$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r'$$



"Biot-Savart" (OJO, SON 3 COMPONENTES!)

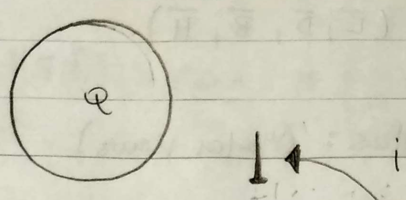
- $$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r'$$

Ahora, pensemos en problemas ESTÁTICOS en los que NO CONOCEMOS $\rho(\vec{r})$ o $\vec{J}(\vec{r})$ ...

¿Se les ocurre alguno?

Cáscara esférica CONDUCTORA cargada...

Un ejemplo: Una cáscara esférica cargada, flotando en el espacio vacío, con carga Q ¡Fácil!



Y le arrimo un clavo con carga Q'

¿Cómo queda distribuida la carga en la esfera? Ni idea chiquilines!!

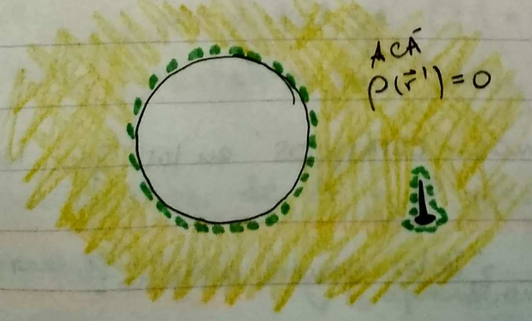
- Sin embargo, sabemos COSAS:
  - i) la superficie de la esfera TIENE QUE SER UNA EQUIPOTENCIAL
  - ii) la superficie del clavo TAMBIÉN
  - iii) las líneas de $\vec{E}$ son PERPENDICULARES a las equipotenciales
  - iv) De las CONDICIONES de FRONTERA (vacío)

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) \cdot \hat{n} = \frac{\sigma_{libre}}{\varepsilon_0}$$

podríamos hallar σ en la esfera...

¿QUÉ ESTAMOS HACIENDO EN REALIDAD?

Estamos resolviendo la ECUACIÓN de LAPLACE para el POTENCIAL $\nabla^2 \phi = 0$, en la región del espacio donde no está el clavo (ni la cáscara esférica). Y poniendo UNA CONDICIÓN en el BORDE de esa región → QUE EL POTENCIAL SEA CONSTANTE.



→ **PROBLEMA DE CONTORNO**

- Si en la región del espacio HAY cargas libres $\rho(\vec{r}) \neq 0$, vamos a buscar SOLUCIONES de la EC. de POISSON $\nabla^2\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0}$, y también tendremos CONDICIONES de BORDE.

ATENCIÓN: Laplace ($\nabla^2\phi = 0$) es la ecuación HOMOGÉNEA de la ecuación de Poisson ($\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon_0$), entonces UNA solución GENÉRICA de Poisson, es una SOLUCIÓN PARTICULAR + una solución de Laplace! → SUPERPOSICIÓN!

¿Qué necesitamos APRENDER?

1) A escribir correctamente distribuciones de carga $\rho(\vec{r})$:
USAR DELTAS DE DIRAC

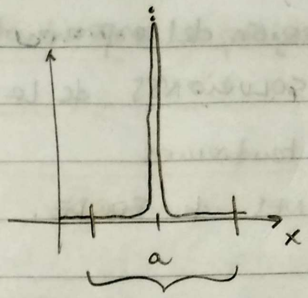
2) Ver que una solución de la ec. de Poisson es ÚNICA si damos ciertos tipos de CONDICIONES DE BORDE

3) A resolver la ec. de Poisson y Laplace

(Este plan nos va a llevar unos días!)

DELTA DE DIRAC (¡SÓLO LO FUNDAMENTAL!) Ver · Apéndice C Vanderlinde
· 1.5.4 Zangwill

1D - • $\int_I \delta(x-a)\,dx = \begin{cases} 1 & \text{si } a\in I \\ 0 & \text{si } a\notin I \end{cases}$



I intervalo
I : puede ser todo el eje $\mathbb{R}$

• $\int_I f(x)\,\delta(x-a)\,dx = \begin{cases} f(a) & \text{si } a\in I \\ 0 & \text{si } a\notin I \end{cases}$

y se puede definir informalmente:

$$\delta(x)=0 \text{ si } x\neq 0 \quad , \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,dx = 1$$

• $\delta(f(x)) = \sum_i \dfrac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ con $f(x_i)=0$ y $f'(x_i)\neq 0$.

$$\Rightarrow \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

• ATENCIÓN a una cosa de la definición:

$$\int_I \delta(x-a)\,dx = 1 \quad \text{si } a\in I$$

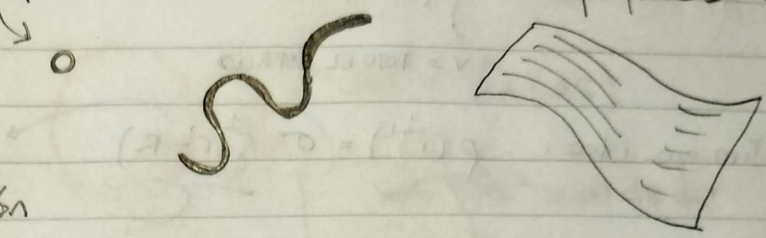
1 → número sin dimensiones

dx → LONGITUD

δ tiene que tener UNIDADES de $\dfrac{1}{\text{LONGITUD}}$

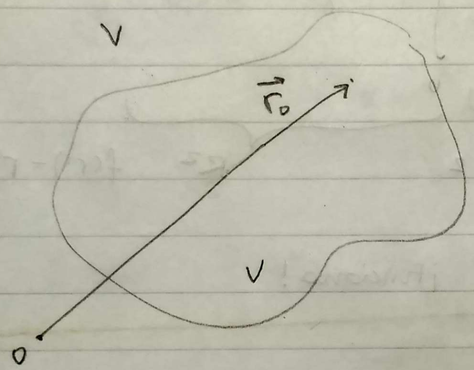
(es una distribución...)

3D - Queremos especificar cantidades QUE NO SE EXTIENDEN en todas las dimensiones : puntos , líneas o superficies .



El intervalo de integración ahora es un volumen :

$$\int_V f(\vec{r})\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\,d^3r = \begin{cases} f(\vec{r}_0) & \text{si } \vec{r}_0 \in V \\ 0 & \text{si } \vec{r}_0 \notin V \end{cases}$$

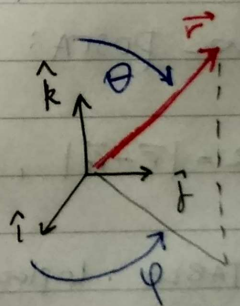


$$\left[\ \delta^3(\vec{r}) = 0 \text{ para } \vec{r} \neq \vec{0} \text{ y } \quad \int_V \delta^3(\vec{r})\,d^3r = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \in V \\ 0 & \text{si } \vec{r} = \vec{0} \notin V \end{cases}\right.$$

EN CARTESIANAS: $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$$\delta^3(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

$$d^3r = dx\,dy\,dz$$

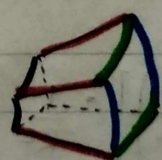


EN ESFÉRICAS :

$$d^3r = (r\,\text{sen}\theta\,d\varphi)(r\,d\theta)(dr)$$

$$d^3r = r^2\,\text{sen}\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr$$

$\to$ (LONGITUD)^2



$$\vec{r} = r\,\hat{e}_r(\theta,\varphi)$$

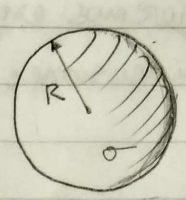
$$\vec{r}_0 = r_0\,\hat{e}_r(\theta_0,\varphi_0)$$

$$\Rightarrow \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0) = \frac{1}{r^2\,\text{sen}\theta}\,\delta(r-r_0)\,\delta(\theta-\theta_0)\,\delta(\varphi-\varphi_0)$$

EN CILÍNDRICAS ? $\to$ Deberes!

Un ejemplo: Cascarón esférico con σ uniforme

$$Q = 4\pi R^2 \sigma = \int\limits_{V = \text{TODO EL ESPACIO}} \rho(\vec{r}\,') \, d^3r'$$



Tiro una idea: $\underbrace{\rho(\vec{r}\,')}_{\frac{\text{coulomb}}{m^3}} = \underbrace{\sigma}_{\frac{\text{coulomb}}{m^2}} \underbrace{\overset{1}{\delta}(r' - R)}_{\frac{1}{m}}$ Delta unidimensional: sólo coordenada radial

$$Q = \int\limits_V \delta(r'-R)\,\sigma \, d^3r' = \sigma \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi'}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\theta' \operatorname{sen}\theta'}_{-\cos\theta' \Big|_0^{\pi} = 2} \underbrace{\int_0^{\infty} r'^2 \, \delta(r'-R) \, dr'}_{R^2} \qquad f(r') = r'^2 \Big|_{r'=R}$$

$$= \sigma \, 2\pi . 2 . R^2$$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma \quad \checkmark \quad \text{¡Funciona!}$$

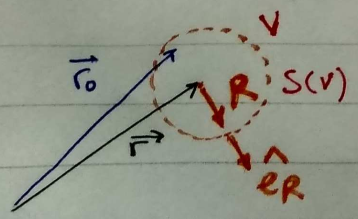
Ahora la POSTA: $\nabla^2 \left(\dfrac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -4\pi \, \delta^3(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Defino $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, $f(R) = \dfrac{1}{R}$ y calculo $\nabla^2 \left(\dfrac{1}{R} \right)$

MIRANDO TABLA: laplaciano en esféricos

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \right) \right] = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^2 \left(\frac{-1}{R^2} \right) \right] = 0 \quad \text{si } R \neq 0$$

¿Qué pasa si $R = 0$? Usemos el teorema de Gauss en una esferita chica

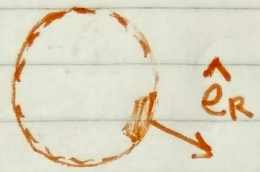


$$\int\limits_V d^3R \, \nabla^2 \left(\frac{1}{R} \right) = \int\limits_V d^3R \, \nabla . \left(\nabla \left(\frac{1}{R} \right) \right) \underset{\text{Teo.}}{=} \int\limits_{S(V)} \nabla \left(\frac{1}{R} \right) . d\vec{S}$$

↗ Tabla: Gradiente en esféricos

Ahora: $\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\hat{e}_R = -\frac{1}{R^2}\hat{e}_R = \frac{-\hat{e}_R}{R^2}$

y quién es $d\vec{s}$?



$d\vec{s} = \hat{e}_R\,(ds)$

$ds = R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi$

Entonces

$$\int_V d^3R \, \nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = \int_{S(V)} \left(-\frac{\hat{e}_R}{R^2}\right) \cdot \hat{e}_r \left(R^2 \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi\right) = \int_{S(V)} (-\operatorname{sen}\theta)\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \, (-\operatorname{sen}\theta) = -4\pi$$

O sea $\int_V d^3R \, \underbrace{\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)}_{f(R)} = -4\pi$ o $\int_V d^3r \, \nabla^2 \underline{\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right)} = -4\pi$ ⟹

y por definición:

$$\int_{V \text{ chiquito}} d^3r \, \underline{\left(-4\pi\, \delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)\right)} = -4\pi$$

en $\vec{r} \cong \vec{r}_0$

$$\Rightarrow \nabla^2\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}\right) = -4\pi\,\delta^3(\vec{r}-\vec{r}_0)$$

¡Tremendo!