Clase 3 (virtual). Potenciales electromagnéticos. Invariancia de gauge. Gauges de Coulomb y Lorenz. Conjunto de funciones gauge que cumplen la condición de Lorenz. (Leer en Zangwill cap. 15.3).

- **PROBLEMA**: Conociendo los FUENTES $\rho(\vec{r},t)$ y $\vec{J}(\vec{r},t)$; quiero hallar los CAMPOS ($\vec{E}(\vec{r},t)$, $\vec{D}(\vec{r},t)$, $\vec{B}(\vec{r},t)$ y $\vec{H}(\vec{r},t)$) que producen.

Tengo las ecs. de Maxwell, y la "densidad de fuerza" de Lorentz

(a) • $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$ y $\vec{D}(\vec{E})$

(b) • $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

(c) • $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$

(d) • $\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{libre}$ y $\vec{H}(\vec{B})$

(fuerza por unidad de volumen)

$$\vec{f} = \rho^* \vec{E} + \vec{J}^* \times \vec{B}$$

- ¿Y qué traigo? Tengo el TEOREMA de HELMHOLTZ:

Conociendo la DIVERGENCIA y el ROTOR de un campo vectorial C^1 (continuo y derivable con derivada continua), puedo hallar el campo !!

Ver Zangwill 1.9

El campo C^1 $\vec{F}(\vec{r})$ se puede escribir como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \underbrace{-\nabla(\varphi(\vec{r}))}_{\vec{F}_{\parallel}} + \underbrace{\nabla \times \vec{a}(\vec{r})}_{\vec{F}_{\perp}} \equiv \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \quad , \text{ con}$$

$\nabla \times \vec{F}_{\parallel} = 0$ y $\nabla \cdot \vec{F}_{\perp} = 0$.

- si el campo $\vec{F}$ es "regular" en $|\vec{r}| \to \infty$, se puede probar que

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad \text{"Parte LONGITUDINAL de } \vec{F}\text{"}$$

y $$\vec{a}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} dv' \quad \text{"Parte TRANSVERSAL de } \vec{F}\text{"}$$

NO LO VAMOS A PROBAR !

Ahora, fijense que si tenemos un campo $\vec{L}(\vec{r})$ y una función $\ell(\vec{r})$

(1) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{L}) = 0$ la divergencia de un rotor, es nula.

(2) $\nabla \times (\nabla \ell) = 0$ El rotor de un gradiente es nulo

* Entonces, vamos a ver que si hallamos el potencial vector magnético $\vec{A}(\vec{r},t)$ y el potencial eléctrico $\phi(\vec{r},t)$ a partir de las fuentes $\rho(\vec{r},t)$ y $\vec{J}(\vec{r},t)$, vamos a poder escribir los campos $\vec{E}(\vec{r},t)$ y $\vec{B}(\vec{r},t)$ y, al menos para casos simples como los medios LINEALES.

¡Hagámoslo!

- Vamos a DEFINIR los POTENCIALES:

Usando las ECUACIONES HOMOGÉNEAS (sin fuentes)

(b) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ se define $\vec{A}$ tq. $\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \xRightarrow{(1)} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ ✓

(c) $\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial (\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$

$\xRightarrow{(2)} \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$

→ Este signo de (-) se pone para que las líneas de $\vec{E}$ apunten desde lugares de mayor potencial a los de menor potencial

y se define ϕ tq. $\nabla \phi = -\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$ y $\boxed{\vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$

- Ahora usamos las ecs. inhomogéneas (con fuentes), suponiendo que tenemos un medio LINEAL (EL VACÍO): $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ y $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$

(a) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \Rightarrow$

$\nabla \cdot (\nabla \phi) + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0}$

$$\boxed{\nabla^2 \phi + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0}}$$

(d) $\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}_{libre} \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \frac{\partial (\varepsilon_0 \vec{E})}{\partial t} = \vec{J}_{libre} \Rightarrow$

$\nabla \times \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_{libre}$

$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \varepsilon_0$ velocidad de la luz en el vacío

$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}_{libre}$

Ahora

$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ → fórmula mágica y $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) =$

$= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

Entonces:

$\nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla \phi + \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) = \mu_0 \vec{J}_{libre}$ y agrupamos

$$\left(-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right) + \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = \mu_0 \vec{J}_{libre}$$

✱ Ecuación de continuidad (la agregamos por completitud)

¿Cómo se relacionan $\rho(\vec{r},t)$ y $\vec{J}(\vec{r},t)$?

Tomamos $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{H}) \underset{(1)}{=} 0 \underset{(d)}{=} \nabla \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{D})}{\partial t}$ → (a) ρ

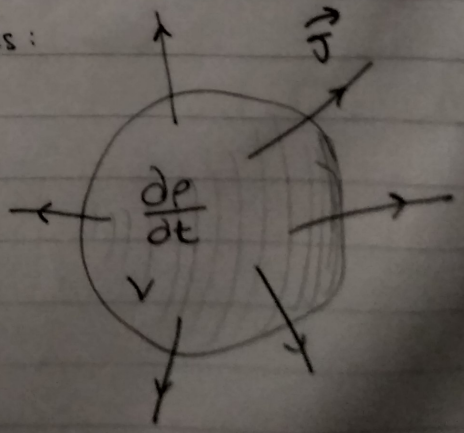
$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Si la integro en un volumen, y uso el Teo. de Gauss:

$\int_V \nabla \cdot \vec{J} \, dv = \int_{S(V)} \vec{J} \cdot \hat{n} \, ds \equiv$ FLUJO de $\vec{J}$ que atraviesa la superficie (T. Gauss)

$\| $

$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv = -\frac{d\Phi}{dt}$ con $\Phi = \int_V \rho \, dv$



⇒ la CARGA eléctrica se CONSERVA.

Defino:

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

y uso

$$-\left(\nabla^2\phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A})\right) = \rho_{libre}/\varepsilon_0$$

$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \nabla\left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) = \mu_0 \vec{J}_{libre}$$

} *

y puedo hallar $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a partir de ρ_{lib} y $\vec{J}_{lib}$.

Fíjense que es mejor hallar ϕ y $\vec{A}$ (4 grados de libertad) que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ (6 gr de libertad).

¡Pero qué feas ecuaciones! ¿Hay algo que nos permita "simplificar" las ecuaciones * ? ¡SÍ! LA LIBERTAD (O INVARIANCIA) de GAUGE ...

- MODIFICAMOS los potenciales por una función $\lambda(\vec{r},t)$ "calibre" (gauge)

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda \Rightarrow \vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla\lambda) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

(2)

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\nabla\phi' - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{A} + \nabla\lambda) = \vec{E} \iff \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

→ Entonces haciendo la transformación de gauge

$$\vec{A} \longrightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$$

$$\phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

} los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ quedan ¡IGUALES !!

- la idea es ELEGIR una función de gauge $\lambda(\vec{r},t)$ que nos SIMPLIFIQUE las ecuaciones * : Eso se llama "FIJAR el GAUGE" (No se sienten adultos ??)

Hay 2 opciones bien famosas → Gauge de Coulomb (se usa en electrostática, en física de la materia condensada, etc...)

→ Gauge de Lorenz (SIN LA T: es otro amigo)

Ludwig Lorenz ≠ Heinrich Lorentz

(se usa para estudiar la radiación electromagnética, y en la formulación covariante -relativista).

Gauge de COULOMB : Elegimos $\lambda(\vec{r},t)$ tal que $\boxed{\nabla\cdot\vec{A}=0}$ $\rightarrow$

CONDICIÓN DE COULOMB

$*\Rightarrow$ $\nabla^2\phi = -\rho_{libre}/\varepsilon_0$ ECUACIÓN DE POISSON ¡Vieja amiga que aprenderemos a resolver PRONTO! $*$

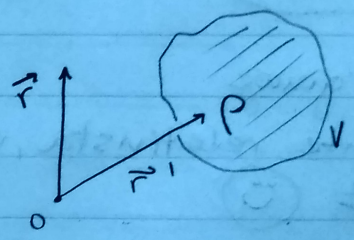
$$-\nabla^2\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial(\nabla\phi)}{\partial t} = \mu_0\vec{J}_{libre}$$

$$\Box\vec{A} = \mu_0\vec{J}_{lib} - \frac{1}{c^2}\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

↓ d'Alambertiano

- Ya conocemos soluciones de la ec. de Poisson (no?)

$$\phi(\vec{r},t)_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r' \quad \text{si } \phi(\vec{r},t)\to 0 \text{ cuando } |\vec{r}|\to\infty$$



- Si además usamos la ec. de CONTINUIDAD (∇' deriva respecto a las coordenadas "prima")

$$\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}',t) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}',t) = 0 \rightarrow$$

$$\nabla\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \nabla\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\partial\rho/\partial t}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\int_V \frac{-\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'\right) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\left(\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'\right) \quad \text{y te sale}$$

$$\Box\vec{A} = \mu_0\vec{J}_{lib} + \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}_{\frac{\mu_0}{4\pi}}\nabla\left(\int_V \frac{\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'\right)$$

Así que hallás $\vec{A}$ a partir de $\vec{J}_{libre}$ ... ¡un éxito!

Gauge de Lorenz: Elegimos $\lambda(\vec{r},t)$ tal que $\boxed{\nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0}$

CONDICIÓN DE LORENZ

$\Rightarrow$ * $\left\{ -\left(\nabla^2\phi + \frac{\partial(\nabla\cdot\vec{A})}{\partial t}\right) = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Box\phi = \frac{\rho_{libre}}{\varepsilon_0} \right.$

$\left. \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{A} = \mu_0\vec{J}_{libre} \Rightarrow \Box\vec{A} = \mu_0\vec{J}_{libre} \right.$

Observaciones:

i) las 2 ecuaciones quedan DESACOPLADAS

ii) El operador $\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ es INVARIANTE al hacer TRANSFORMACIONES de LORENTZ (de un referencial inercial a otro que se mueve respecto a él)

$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \partial_\mu\partial^\mu$

S $\uparrow\rightarrow$ S' $\frac{\vec{v}}{N}$ BOOST

así que este gauge es invariante relativista, y es muy útil justamente para estudiar la LUZ ☺

- ¿Cuándo existe un $\lambda(\vec{r},t)$ que cumple la CONDICIÓN de LORENZ?

Tomamos $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\lambda$, $\phi' = \phi - \frac{\partial\lambda}{\partial t}$

$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi'}{\partial t} = \nabla\cdot\vec{A} + \underbrace{\nabla(\nabla\cdot\lambda)}_{\nabla^2\lambda} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}$

$= \nabla\cdot\vec{A} + \Box\lambda + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

Si λ cumple que $\Box\lambda + \nabla\cdot\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$,

se cumple la condición de lorenz. Entonces tomando la transformación $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\lambda$, $\phi \rightarrow \phi - \partial\lambda/\partial t$, con λ tal que $\Box\lambda = 0$, todos estos potenciales están en la "clase" del gauge de lorenz.

Hallo cada componente de $\vec{A}$ y ϕ resolviendo una ECUACIÓN DE ONDAS INHOMOGÉNEA

↳ lo aprenderemos a hacer más adelante...