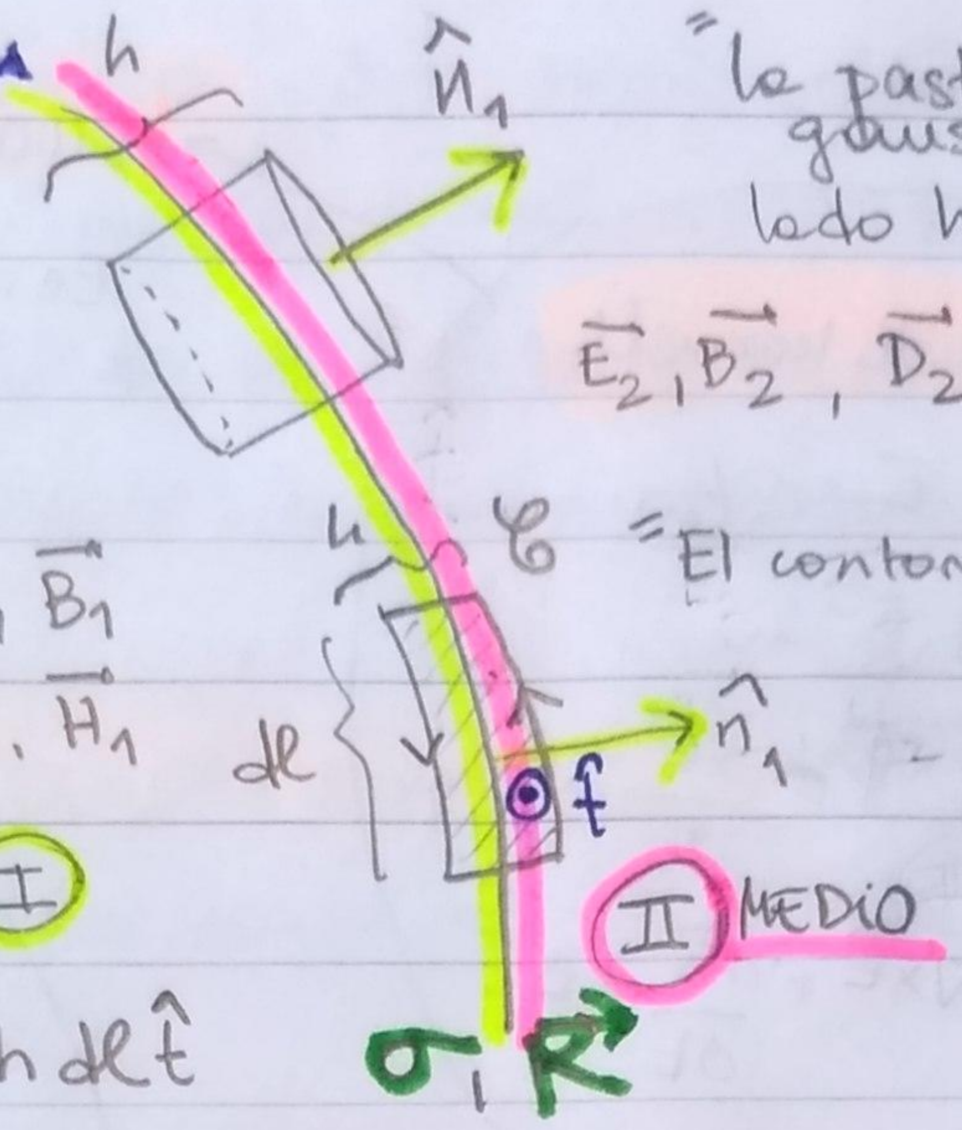
# Clase 2 Condiciones de matching en fronteras.

Jackson 1.5




Superficie en reposo respecto al sistema donde se miden los campos.

"la pastillita gaussiana": Volumen V, área de tapa ds, lado $h \to 0$

$\vec{E}_2, \vec{B}_2, \vec{D}_2, \vec{H}_2$

$\vec{E}_1, \vec{B}_1$
$\vec{D}_1, \vec{H}_1$

"El contornito" $\mathcal{C}$ de Stokes

$\hat{n}_1$ SALIENTE DEL MEDIO I, $\hat{n}_2$ SALIENTE DEL MEDIO II

MEDIO I

II MEDIO

$d\vec{s} = h\, d\ell\, \hat{t}$

$\mathcal{C}$ tiene largo $d\ell$, ancho $h \to 0$ y no tiene área...

los vectores:
$\hat{t}$ tg. a la superficie, definido por la orientación de $\mathcal{C}$ tal que

$d\ell(\hat{t} \times \hat{n}) = d\vec{\ell}$

$d\ell(\hat{t} \times \hat{n}_1) = d\vec{\ell}$ en medio 2

$d\ell(\hat{t} \times \hat{n}_2) = d\vec{\ell}$ en medio 1

En la superficie tenemos una densidad superficial de carga libre $\sigma$ y una densidad superficial de corriente $\vec{K} = \sigma \vec{v}$, si $\vec{v}$ es la velocidad con que se mueven las cargas.

$[\sigma] = \frac{C}{m^2}$ , $[\vec{K}] = \frac{C}{m^2}\frac{m}{s} = \frac{C}{m\,s}$

- Gauss en la pastilla (Teo. Gauss) $\int_V \nabla \cdot \vec{D}\, dv = \int_V \rho_{libre}\, dv \to$ teorema de Gauss

(1) $\Rightarrow \oint_{S(V)} \vec{D} \cdot \hat{n}\, ds = \int_V \rho_{libre}(\vec{r}, t)\, dv \Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_1\, ds = \sigma_{libre}\, ds \Rightarrow (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \hat{n}_1 = \sigma_{libre}$

"La discontinuidad de la componente normal de $\vec{D}$ es igual a la densidad superficial de carga en cada punto de la interfase".

$\rho_{libre} = \sigma_{libre}\, \delta^1(\vec{r} - \vec{r}_s)$ → Recordar que $[\delta^1(\vec{r} - \vec{r}_s)] = \frac{1}{\text{distancia}} \cong m^{-1}$

(2) $0 = \int_V \nabla \cdot \vec{B}\, dv = \int_{S(V)} \vec{B} \cdot \hat{n}\, ds = (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_1\, ds = 0 \Rightarrow (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \hat{n}_1 = 0$

"La componente normal de $\vec{B}$ es continua".

Si lo piensan así: (sin mucha formalidad):

$$\int_V dv = \int_S ds \int_r dr$$

$$dv = ds\, dr$$

• Faraday y Ampère en el contornito (Teo. Stokes)

(3)

Faraday: $\int_S \nabla\times\vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{S(\mathcal{B})} -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{s} \underset{\text{stokes}}{\Rightarrow} \oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = -\int_{S(\mathcal{B})\to 0} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot\hat{t}\,ds \to 0$

Finito en la interfase

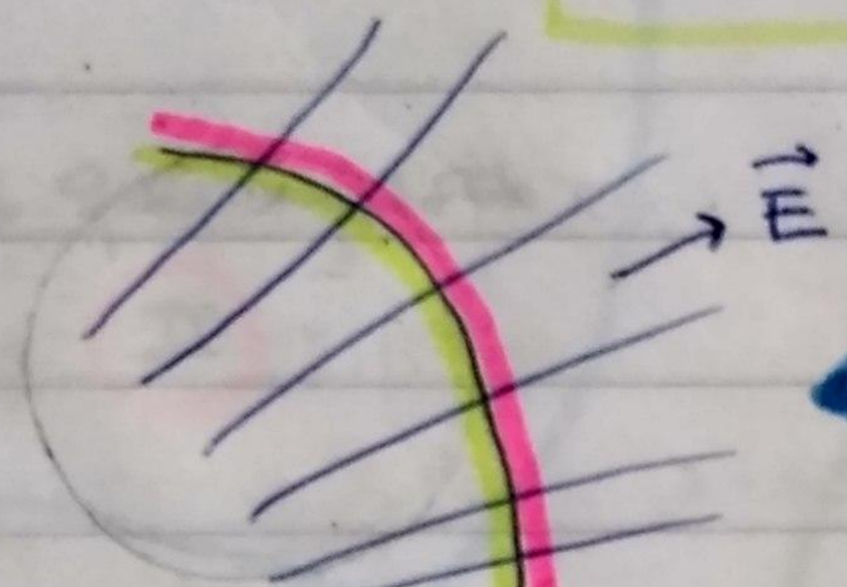
$$d\vec{s} = \hat{t}\,ds$$

$$\Rightarrow \oint_{\mathcal{B}} \vec{E}\cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \underset{A}{(\vec{E}_2-\vec{E}_1)}\cdot(\underset{B}{\hat{t}}\times\underset{C}{\hat{n}_1})\,d\ell = 0$$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$ Permutación cíclica...

$$\Rightarrow \hat{t}\cdot(\hat{n}_1\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)) = 0 \Rightarrow$$

$\hat{n}_1\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1) = 0$ "la componente tangencial de $\vec{E}$ es continua".




Fíjense que esto quiere decir que las líneas de $\vec{E}$ no se "quiebran" en las superficies

(4) Ampère: $\int_S \nabla\times\vec{H}\cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J}_{libre}\cdot d\vec{s} + \oint_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{s}$

Ahora:

$$\int_S \vec{J}_{libre}\cdot\hat{t}\,ds + \int_S \cancel{\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot\hat{t}\,ds} = \int_S \vec{J}_{libre}\cdot\hat{t}\,ds = \vec{K}_{libre}\cdot\hat{t}\,d\ell$$

$\hookrightarrow 0$ finito en la interfase

0

(✱) $\vec{J}_{libre} = \vec{K}_{libre}\,\underbrace{\delta^{1}(\vec{r}-\vec{r}_s)}_{m^{-1}}$

$\vec{J}_{libre}$: $\frac{C}{m^2 s}$ $\quad$ $\vec{K}_{libre}$: $\frac{C}{ms}$

Reemplazar con $\delta$

$\Rightarrow \vec{J}_{libre}\cdot\hat{t} = \vec{K}_{libre}\cdot\hat{t}\,\delta^{1}(\vec{r}-\vec{r}_s)$

$\Rightarrow \int_S \vec{J}_{libre}\cdot\hat{t}\,ds = \vec{K}_{libre}\cdot\hat{t}\,d\ell$

$ds = h\,d\ell$

$\hookrightarrow 0$

"la discontinuidad de la componente tangencial de $\vec{H}$ es igual a la densidad superficial de corriente en la superficie."

Entonces:

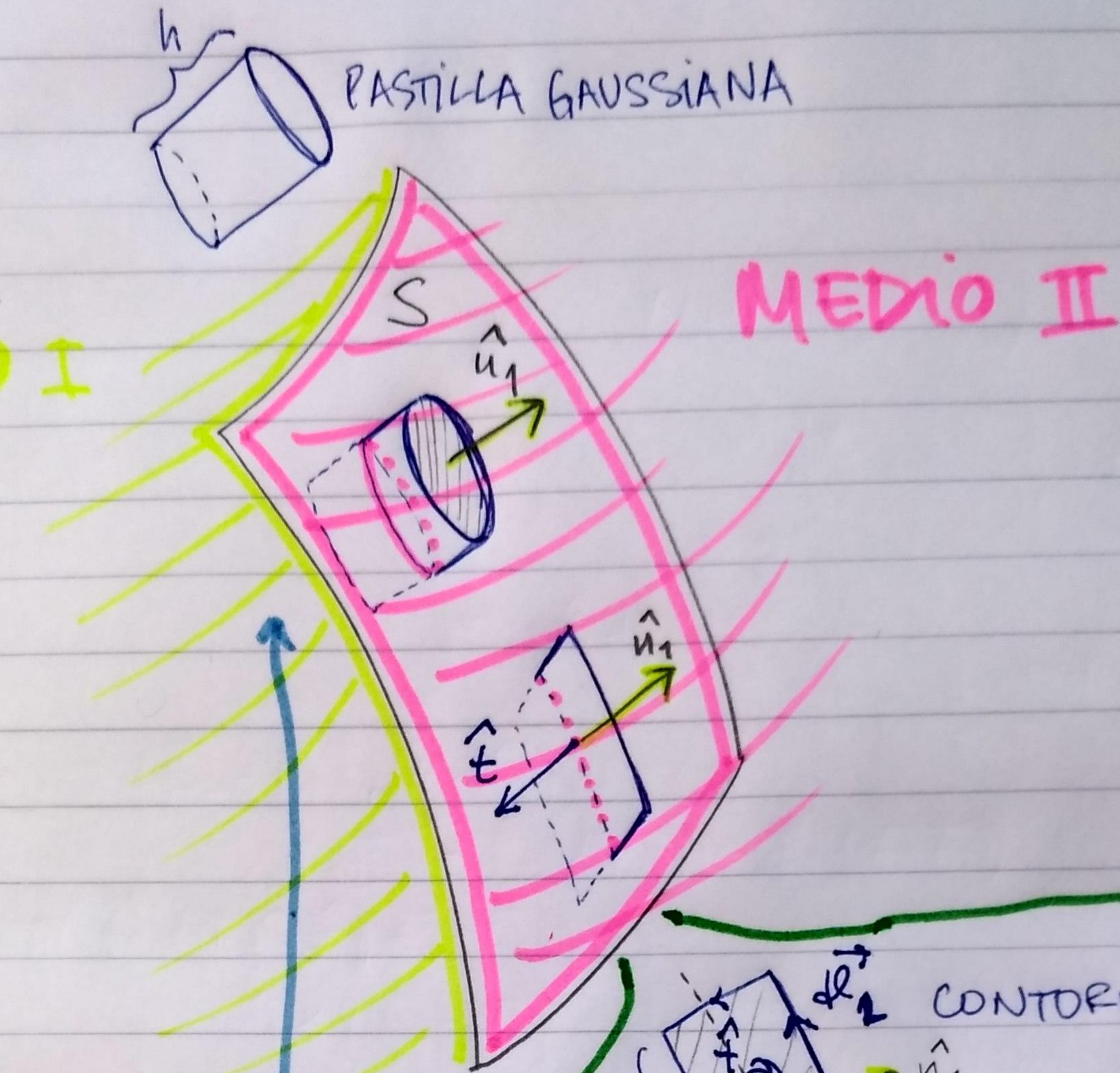
$$\int_S \nabla\times\vec{H}\cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{C}(S)} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = (\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot\overbrace{(\hat{t}\times\hat{n}_1)\,d\ell}^{d\vec{\ell}\text{ en medio 2}} = \vec{K}_{libre}\cdot t\,d\ell$$

$$\hat{n}_1\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\cdot\hat{t} = \vec{K}_{libre}\cdot\hat{t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\hat{n}_1\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1) = \vec{K}_{libre}}$$

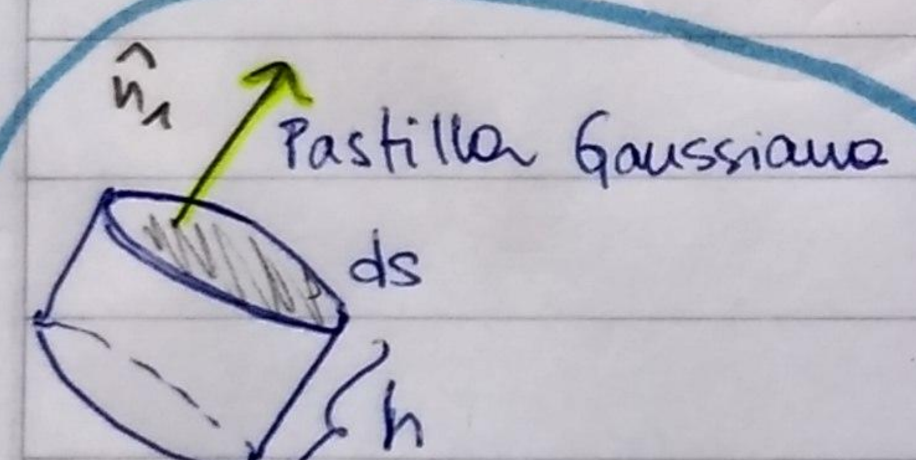
PASTILLA GAUSSIANA

MEDIO I




$\hat{n}_1$: normal saliente del medio I

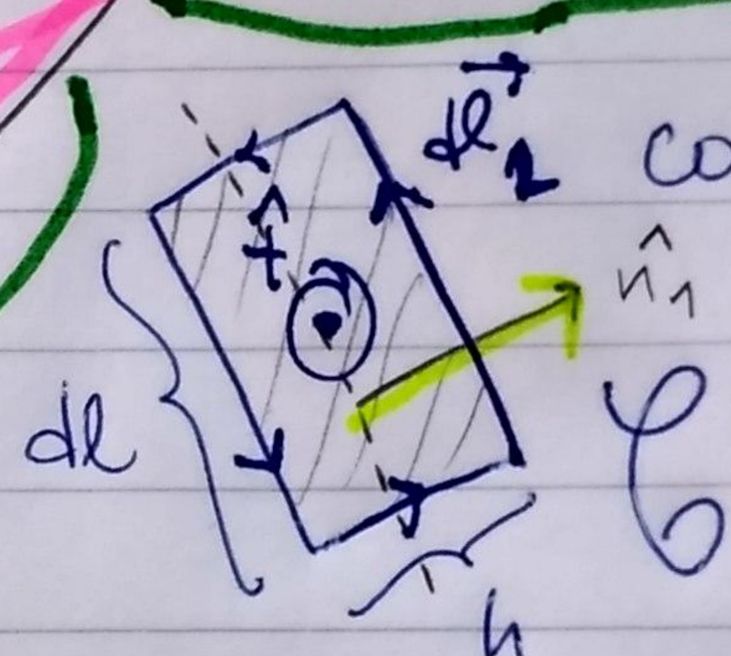
S: superficie que separa medios I y II




volumen $V = h\,ds$

la altura h de la pastilla, y el ancho h del contornito, se van a hacer tender a 0: $h \to 0$.

CONTORNITO DE STOKES




$\hat{t}$ es tangente a S (la superficie) y es PERPENDICULAR a la superficie del contornito $\mathcal{C}$

$\vec{dl}_2$ es el elemento de línea de $\mathcal{C}$ en el medio 2.

$$\vec{dl}_2 = dl\,(\hat{t} \times \hat{n}_1)$$

El diferencial de superficie de $\mathcal{C}$ es $\vec{dS} = h\,dl\,\hat{t} = \hat{t}\,ds$