12. Funciones de Green del laplaciano (Refs: [6], cap. 3)

12.1. Generalidades

1. Las funciones de Green $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ del operador Laplaciano, para un problema con CB de Dirichlet o Neumann en una región limitada por la superficie S con normal saliente $\hat{\mathbf{n}}$, están caracterizadas por:

$$\nabla'^2 G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad \text{con:} \begin{cases} G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}'\in S) = 0 & \text{CB de Dirichlet} \\ \\ \partial_n G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}'\in S) = -\dfrac{4\pi}{S} & \text{CB de Neumann} \end{cases} \tag{3}$$

2. La ecuación diferencial de (3) para G tiene la solución general:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = N(\mathbf{r},\mathbf{r}') + F(\mathbf{r},\mathbf{r}') \qquad \begin{cases} N : \text{solución particular de } \nabla'^2 G = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\ F : \text{solución general de } \nabla'^2 G = 0 \end{cases}$$

- F se elige para que G satisfaga las CB.
- N se llama *solución fundamental* y tiene las expresiones en $2d$ y $3d$:

$$N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \begin{cases} -\ln((x-x')^2+(y-y')^2) & 2d \\ \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} & 3d \end{cases}$$

3. Las soluciones respectivas para los problemas electrostáticos de frontera son:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\, G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{d}V' - \frac{1}{4\pi}\oint_S \Phi(\mathbf{r}')\,\frac{\partial G_D}{\partial n'}\,\mathrm{d}S'$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = <\Phi>_S + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r}')\, G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')\, \mathrm{d}V' + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial \Phi}{\partial n'} G_N\,\mathrm{d}S'$$

12.2. Propiedades

1. $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ es continua en $\mathbf{r}$ y $\mathbf{r}'$.

2. Simetría:

- $G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_D(\mathbf{r}',\mathbf{r})$
- $G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ puede no ser simétrica. Se puede definir otra función de Green equivalente mediante:

$$\bar{G}_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') - \frac{1}{S}\oint_S G_N(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,\mathrm{d}S''$$

y resulta: $\bar{G}_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \bar{G}_N(\mathbf{r}',\mathbf{r})$

12.3. Algunas funciones de Green para problemas de Dirichlet

1. Esfera de radio a (ver figura 16)

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{a}{r'\left|\mathbf{r} - \dfrac{a^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right|}$$
$$= \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\dfrac{r^2r'^2}{a^2} + a^2 - 2rr'\cos\gamma\right)^{1/2}}$$

2. Región entre esferas de radios $a<b$

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{Y^*_{lm}(\theta',\phi')Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]}\left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right)\left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

3. Cilindro finito de radio a y altura L

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{4}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\delta_{m0})\,\frac{J_m(k_{mn}\rho)J_m(k_{mn}\rho')}{x_{mn}J^2_{m+1}(x_{mn})\,\mathrm{senh}(k_{mn}L)}\,Z_{mn}(z,z')\,\cos[m(\phi-\phi')]$$

$$Z_{mn}(z,z') = \mathrm{senh}(k_{mn}z_<)\,\mathrm{senh}[k_{mn}(L-z_>)]$$
$$k_{mn} = x_{mn}/a$$

4. Región $z>0$

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') \;=\; \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}$$

5. Región entre dos planos separados L

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{4}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im(\phi-\phi')}\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}z\right)\,\mathrm{sen}\left(n\frac{\pi}{L}z'\right)\,I_m\left(n\frac{\pi}{L}\rho_<\right)\,K_m\left(n\frac{\pi}{L}\rho_>\right)$$

6. Disco de radio a (cilindro infinito de radio a)

$$G_D(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \ln\left[\frac{(\rho\rho'/a)^2+a^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\phi-\phi')}\right]$$

7. Cuadrado de lado 1

$$G_D(x,y;x',y') = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,\mathrm{senh}(n\pi)}\;\mathrm{senh}(n\pi y_<)\,\mathrm{senh}(n\pi(1-y_>))\,\mathrm{sen}(n\pi x)\,\mathrm{sen}(n\pi x')$$