Teoría Electromagnética. Curso 2013.
Profesor: Ariel Moreno **Asistente:** Rodrigo Eyheralde

Práctico 3. Laplace y Poisson. Desoarrollos en funciones ortogonales

1. (a) Determinar el potencial entre dos planos paralelos separados una distancia d, ambos a potencial cero salvo por un cuadrado de lado a en uno de ellos a potencial V_0.

2. Dada la ecuación de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$:
(a) Obtenga los coeficientes del desarrollo de las soluciones como series $y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
(b) Demuestre que si exigimos que las soluciones seas suaves en $x = \pm 1$, las series se reducen a polinomios.

3.
(a) Demuestre que $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(cos(\gamma))$, donde $cos(\gamma) = \frac{\vec{x}.\vec{x}'}{|\vec{x}||\vec{x}'|}$, $r_> = max(|\vec{x}|, |\vec{x}'|)$ y $r_< = min(|\vec{x}|, |\vec{x}'|)$.
(b) Demuestre el teorema de adición de armónicos esféricos:
$P_l(cos(\gamma)) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$.
Donde $cos(\gamma) = cos(\theta)cos(\theta') + sen(\theta)sen(\theta')cos(\phi - \phi')$
(c) Finalmente deduzca que la expansión de $\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$ en armónicos esféricos es:
$\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$

4.
(a) Demuestre que la función de Green para el problema de Dirichlet entre 2 esferas concéntricas de radios a y b es:
$G(\vec{x}, \vec{x}') = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta',\phi') Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)\left[1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$
(b) Estudie los límites $a \to 0$, $b \to \infty$ y $a = cte$, $b \to \infty$. Interprételos.

5.
(a) Considere un cascarón esférico, cuya superficie se encuentra dividida en 2 hemisferios a potenciales opuestos V_0 y $-V_0$.
(a) Determine el potencial en todo punto del espacio mediante un desarrollo en armónicos esféricos.
(b) Escriba explícitamente los primeros términos del desarrollo.

6. Un disco cargado con carga Q distribuida uniformemente, se ubica dentro de una esfera conductora de radio b, que se encuentra conectada a tierra. Los centros del disco y de la esfera coinciden.
(a) Determine el potencial en todos los puntos de eje del disco.
(b) Determine el potencial en todo el interior de la esfera.
(c) Determine la densidad de carga inducida en la esfera.

7. Calcule el potencial debido a una cáscara esférica de radio a con densidad de carga uniforme σ_0 pero sin la parte correspondiente al interior de un cono θ_0 (un 'mate' con densidad de carga uniforme) tanto dentro como fuera del 'mate'.

8. Calcule el potencial dentro de un cascarón esférico a potencial V_0 que contiene un dipolo $\vec{p}$ en el centro.

9.
(a) Determine gráficamente los primeros 3 ceros de las funciones de Bessel J_0 y J_1.
(b) Usando un software para integración numérica, compruebe que se cumple la relación de ortogonalidad de funciones de Bessel para estas raíces.

10. Calcule el potencial en el interior de un cilindro circular recto de radio a y altura h si:
(a) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$.
(b) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0 sen(2\phi)$.
(b) el potencial es cero en las tapas y $V_0\frac{z(h-z)}{h^2}$ en la cara lateral.
Nota:
$\int xJ_0(x)dx = xJ_1(x)$, $\int x^3J_0(x)dx = 2x^2J_2(x) - x^3J_3(x)$.

11. Partiendo de la solución general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:
(a) estudie el problema de un cilindro infinito a potencial V_0 rodeado por otro cilindro a potencial $V = 0$.
(b) Resuelva el problema por ley de Gauss y compare ambos resultados.