Teoría Electromagnética. Curso 2013.
Profesor: Ariel Moreno **Asistente:** Rodrigo Eyheralde

Práctico 1. Herramientas matemáticas. Potenciales.

1. Sean (u_1, u_2, u_3) coordenadas generalizadas con coeficientes métricos (h_1, h_2, h_3). Determine el gradiente, la divergencia y el rotor en coordenadas, cartesianas, cilíndricas y esféricas partiendo de las siguientes definiciones generales:
(a) Gradiente de un escalar $V(\vec{r})$:
es la derivada direccional de V en la dirección de variación máxima en el punto $\vec{r}$.
(b) Divergencia de un campo $\vec{A}$:
$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta v \to 0} \frac{\Phi_A}{\Delta v}$ donde Δv es un volumen diferencial en torno a $\vec{r}$ y Φ_A es el flujo de $\vec{A}$ a través de su superficie.
(c) Rotor de un campo vectorial $\vec{A}$:
$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \frac{\hat{n} C_{max}(\vec{A})}{\Delta S}$ donde $C_{max}(\vec{A})$ es la circulación de $\vec{A}$ en un camino diferencial de área ΔS en torno a $\vec{r}$ tal que la circulación es máxima. $\hat{n}$ es la normal a dicha superficie.

2. Definiendo la delta de Dirac mediante: $\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x)dx = f(0)$ con f suave en $\mathbb{R}$ y $f(x) \underset{x\to\infty}{\to} 0$ suficientemente rápido.
Pruebe las siguiente propiedades:
(a) $\int_R f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$
(b) $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$
(c) $\delta(f(x)) = \sum\limits_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left|f'(x_i)\right|}$ donde x_i son las raíces de $f(x)$, siempre que $f'(x_i) \neq 0$
(d) $\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x+a)+\delta(x-a)}{2|a|}$
Con la generalización $\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ pruebe que:
(e) $\int_R f(\vec{r})\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)d^3\vec{r} = f(\vec{r}_0)$
(f) Considerando coordenadas esféricas, pruebe que $-4\pi\delta(\vec{r}) = \nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right)$
(g) Demuestre que la transformada de Fourier de $f(x) = e^{ik_0 x}$ es $2\pi\delta(k - k_0)$

3.
(a) Partiendo de $\delta(\vec{r})$ en coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) demuestre que su expresión en otro sistema de coordenadas (h_1, h_2, h_3) es $\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\delta(h_1-h_1')\delta(h_2-h_3')\delta(h_2-h_3')}{\left|Det\left[\frac{\partial x_i}{\partial h_j}\right]\right|}$

(b) Exprese las siguientes distribuciones de carga como densidades volumétricas:

i) Una carga puntual

ii) Una línea de carga infinita de densidad uniforme λ

iii) Un anillo cargado de densidad uniforme λ

iii) Un disco cargado con densidad superficial uniforme σ

iv) Una esfera de densidad superficial uniforme σ

En todos los casos hágalo en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

4.
a) Suponiendo que los campos $\vec{A}$ y ϕ caen suficientemente rápido a 0 en el infinito. Demuestre que:

i) La condición de Coulomb $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ fija por completo la libertad gauge del electromagnetismo (es decir los campos $\vec{A}$ y ϕ).

ii) Este gauge minimiza $\int\limits_{R^3} \left|\vec{A}\right|^2 d^3x$

b) Demuestre que el gauge de Lorenz, definido por $\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, no fija por completo la libertad gauge (en ese caso decimos que es incompleto) . ¿Qué otra condición deberá agregarse para eliminar esta libertad?

c) Muestre que el Gauge temporal definido por $\phi = 0$ es incompleto.

5. Partiendo de la ecuación mas general para los campos $\vec{A}$ y ϕ en el vacío:

a) Obtenga las soluciones conocidas en el caso estacionario, usando el gauge de Coulomb.

b) A partir del resultado de a) calcule la forma de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$

6. Aplique los resultados del ejercicio anterior para obtener los potenciales $\vec{A}$ y ϕ generados por:

a) Una esfera no conductora de radio R y carga uniforme ρ, pero que dentro contiene una burbuja esférica (no cargada) y no concéntrica de radio $a < \frac{R}{2}$

b) Una esfera no conductora con densidad de carga $\rho = c_0 r \cos(\theta)$, siendo c_0 una constante, θ y r coordenadas esféricas usuales. Restrinja el cálculo a un punto del eje z.

c) Un conductor cilíndrico de radio a por el que circula una corriente uniforme I_0, excepto por tubo también cilíndrico de radio $b < a/2$.

d) Un cascarón esférico de radio R y carga uniforme Q que gira a velocidad angular constante ω.

7. El potencial promedio de un átomo de hidrógeno puede aproximarse como:

$\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right)$ con $\alpha = 2/a_o$ y a_0 el radio de Bohr.

Encuentre una distribución de cargas responsable de dicho potencial (distribuida y discreta) y discuta su significado físico.